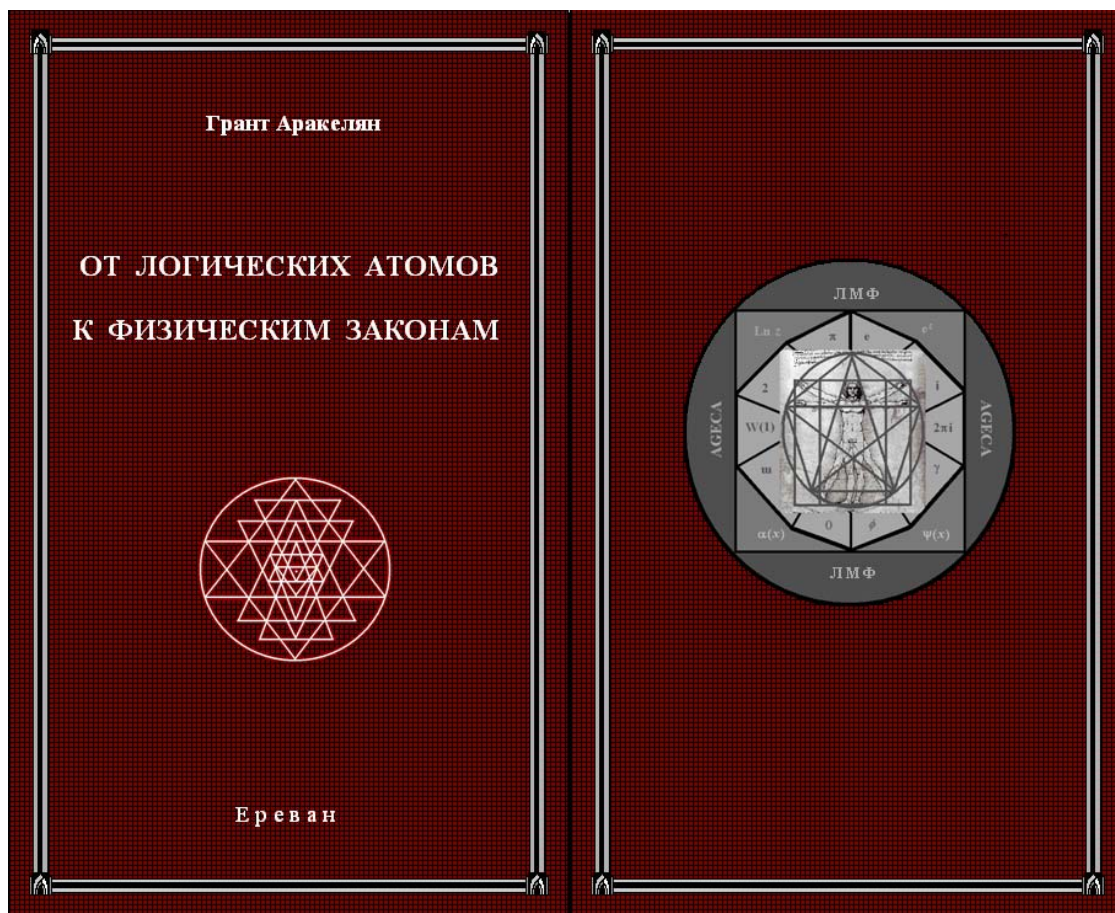




Введение

- Глава 1** От логических атомов к математическим константам
Глава 2 От математических констант к основным физическим уравнениям
Глава 3 От основных уравнений к обобщенным законам

Глава 1

От логических атомов к математическим константам

- 1.1. Основные функции и переменные
- 1.2. Исходные операции
- 1.3. Термы и формулы. Нуль
- 1.4. Логические постулаты
- 1.5. От логики к математике: проблема выбора системы аксиом
- 1.6. Аксиомы Пеано. Системы типа $\mathbb{N}$
- 1.7. Натуральные числа
- 1.8. Почему математика не может начаться с единицы
- 1.9. Формальные системы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{AG}$
- 1.10. Континуум, формальная система, конкретные числа
- 1.11. Функциональные уравнения

- 1.12. Материнские функции ψ и α
 - 1.13. Исследование функциональных уравнений
 - 1.14. Поиск и решение в формальной системе
 - 1.15. Нулевые значения функции ψ , константы $\lambda_0, i, 2$
 - 1.16. Исходные функции и проточисла
 - 1.17. Построение континуума. О других числовых системах
 - 1.18. Комплексные числа. Экспонента и логарифм
 - 1.19. Проточисла и функции
 - 1.20. Уравнение суперпозиции: первый этап исследования
 - 1.21. Суперпозиция для действительной и мнимой переменных
 - 1.22. Еще о косинусе и экспоненте
 - 1.23. Замечания, итоги и перспективы
- Литература

1.1. Основные функции и переменные

Приступая к построению логико-математико-физического формализма теории ЛМФ отметим, что именно в математической логике можно видеть корни формализованной математики. Если исходить из существующих стандартов строгости, то формально-аксиоматическое построение формальной математики должно начинаться с логических атомов – высказываний и других базисных логических элементов, образующих исчисление высказываний, на котором строится исчисление предикатов с исходным понятием предиката, или логической функции. Только после этого к построенному подобным образом логико-дедуктивному формализму добавляется та или иная система математических аксиом с новыми элементами, интерпретируемая на том или ином множестве объектов, не обязательно числовой природы. Выбор адекватной логико-математической основы фундаментальной физической теории, призванной обеспечить единство трех частей системы, практически безальтернативен относительно формальной логики. Классическое исчисление предикатов (без равенства), включающее исчисление высказываний в качестве составной части, может служить при соответствующих модификациях формальной основой множества самых различных математических систем. Такая особенность, очевидно, свидетельствует об универсальности логики, которая в исчислении предикатов предстает в виде математизированной системы, предшествующей системам чистой математики.

Последовательное изложение общих основ теории ЛМФ, удобно начать с логических и математических функций и переменных. Как известно, любая функция есть правило, или закон, устанавливающий определенное соответствие между двумя множествами объектов произвольной природы. Под это определение подпадают и такие сложные случаи как матрицы и тензоры, но нас сейчас больше интересует не столько само правило, сколько объекты, между которыми устанавливается соответствие.

Пропозициональная функция, или n -местный предикат

$$P(x_1, \dots, x_n)$$

– это логическая функция, значениями которой являются высказывания об n переменных $x_1, \dots, x_n$, называемых **предметными**, или **индивидуальными**, **объектными**, поскольку областью их изменения D является множество индивидов, или объектов. В предельном случае $n = 0$ естественно придавать функции постоянное значение, так что нульместный предикат может рассматриваться как **единичное высказывание**. Отметим в скобках, что с формальной по крайней мере точки зрения пропозициональное исчисление, считающееся порой исходным, “атомарным” началом всего научного знания, это лишь частный и предельный в то же время случай исчисления предикатов. Как бы то ни было, при одной переменной пропозициональная

функция $P(x)$ соответствует тому, что называют свойством, при двух переменных функция $P(x_1, x_2)$ соответствует бинарному, при $n = 3$ тернарному отношению, и так далее.

В то время как область значений пропозициональной функции (высказывания) отличается от области изменения ее независимой переменной (индивиды), для многих математических функций, в частности числовых, значения функции принадлежат той же области D , что их аргументы. В этом и состоит отличие подобных математических функций от логического предиката. Добавим, что предельному случаю, когда множество принимаемых переменной значений состоит из единственного члена, соответствует постоянное число. Более того, значениями логических переменных могут быть не только предметы, индивиды, но и сами предикаты. Например, в кванторном выражении

$$\forall x A(x) \supset A(r)$$

x может быть переменной для n -местных предикатов; называется такая переменная **предикатной**.

На месте каждого из n аргументов $y_1, \dots, y_n$ функции

$$F = F(y_1, \dots, y_n)$$

могут соответственно стоять функции

$$y_1 = g_1(x_1, \dots, x_k), y_2 = g_2(x_1, \dots, x_k), \dots, y_n = g_n(x_1, \dots, x_k)$$

от k аргументов $x_1, \dots, x_k$. Тогда функция

$$F = F(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_n(x_1, \dots, x_k))$$

является уже функцией от функций $g_1, \dots, g_n$ через посредство переменных $x_1, \dots, x_k$. При желании любую “простую” функцию можно представить как наложение – **суперпозицию** двух или многих функций, хотя обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Процесс суперпозиции может быть в принципе продолжен до бесконечности и в этом случае, различая отдельные функции индексом i ($i = 1, 2, \dots, n$) и обозначая предельный переход обычным способом, получим выражение

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(f_2(\dots f_n(x_1, \dots, x_k) \dots))$$

для бесконечной суперпозиции функций. Правило, характеризуемое последовательностью символов f_i ($i = 1, 2, \dots, n$), по-прежнему называется функцией, поскольку и здесь можно представить всё таким образом, что числам-переменным $x_1, \dots, x_k$ по правилу-закону $f_1(\dots f_n(\dots))$ ставятся в соответствие также числа – значения **сложной функции**. Забегая вперед, отметим, что в применении к произвольным, действительным или мнимым, математическим числам исходное в логико-дедуктивном исчислении понятие (бесконечной) суперпозиции функций приведет к результату, без которого построение формализма теории ЛМФ было бы просто невозможно. Можно даже сказать, что именно в частном случае последнего предельного равенства – сложной функции от одной математической переменной – заключается одна из главных “изюминок”, “скрытый параметр” теории.

Может случиться, что значение предельного выражения для F определяется только функциями f_i и не зависит от переменных $x_1, \dots, x_k$. Тогда имеет место соответствие между (сложной) функцией и числом, называемое **функционалом**. Классическим примером функционала считается определенный интеграл, являющийся числом определяемым функцией $f(x)$, а также пределами интегрирования a и b , но никак не *связанный* с переменной x . Бросается в глаза, что иногда трудно провести четкие границы между тремя типами математических функций, поскольку одно и то же математическое выражение в зависимости от способа его задания и рассмотрения может считаться либо простой функцией, либо сложной функцией, либо функционалом.

Остается последняя возможность: функциям ставятся в соответствие функции же. Это весьма удобный способ представления уравнений физической теории, особенно популярный в теории поля и квантовой физике; сам способ преобразования данной функции в другую называется **оператором**. Помимо известных операторов классической теории поля, некоммутующих операторов квантовой физики и суперсимметрии, оператором фактически является и обыкновенный интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C'$$

В отличие от определенного неопределенный интеграл ставит в соответствие функции $f(x)$ не число, а с точностью до постоянной интегрирования C' функцию $F(x)$, не совпадающую (за одним-единственным, заслуживающим особого разговора исключением) с $f(x)$. Если учесть, что постоянное число может рассматриваться как частный случай функции, то все логические и математические операции могут считаться операторами, а запись посредством операторов – общей формой представления функциональных связей.

Окончательно имеем:

- а) логическую **пропозициональную функцию**, или **предикат**, предельный случай которого есть **единичное высказывание**

и следующие математические (**числовые**) **функции**:

- б) **простые функции**, являющиеся в частности **постоянными величинами**, или просто **постоянными (константами)**
- в) **сложные функции**, образуемые посредством **суперпозиции**
- г) **функционалы**
- д) **операторы**

Им соответствуют четыре потенциально бесконечных множества переменных:

- 1) **предметные (индивидные) переменные**
- 2) **предикатные** логические **переменные**
- 3) **числовые переменные**
- 4) операторные **функции-аргументы** математики

Понятия **переменной** и **функции** естественным образом объединяются в фундаментальном понятии **величины**. Принимая во внимание имеющиеся возможности, необходимо различать два типа величин, при этом **постоянные (константы)** будут частным случаем **переменных** величин. Следует заметить, что понятие величины, привычное для физики и считающееся одним из основных в математике, см. [Колмогоров], почти не встречается в логике. Можно, однако, думать, что это всего лишь лингвистическая дискриминация, обусловленная исторически сложившейся и достаточно устойчивой традицией употребления тех или иных терминов и понятий. Основополагающая для данной работы идея единства трех фундаментальных областей знания и приведенный выше способ определения логических и математических переменных и функций дает полное право говорить в частности о высказываниях и предикатах как о **логических величинах**, к тому же первичных в определенном смысле по отношению к остальным величинам.

1.2. Исходные операции

Следующий шаг состоит в выделении первичных операций или, если угодно, операторов. В формализме системы ЛМФ их в общей сложности десять: пропозициональные связки $\sim$, $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, называемые также связками исчисления высказываний, или логическими знаками, кванторы всеобщности $\forall$ и существования $\exists$ (перевернутые заглавные буквы английских слов **all** и **exist**), математические операции $=$, $+$, $-$. Все операторы снабжены рангом. По

убыванию ранга слева направо (ранги операторов $+$ и $-$ могут, впрочем, считаться и одинаковыми, тогда порядок следования для них безразличен) операторы располагаются в порядке

$$\sim \supset \& \vee \neg \forall \exists = + -$$

Оператор более высокого ранга имеет бóльшую область действия, а значит, чем ниже ранг оператора, тем сильнее он связывает переменную. Это позволяет обходиться минимальным количеством скобок при написании логико-математических выражений, а во многих случаях можно вообще обойтись без скобок. Конечно, скобки, вообще говоря, необходимы, например если выражение

$$(a \& b) + c$$

записать без скобок, оно будет означать нечто совершенно другое:

$$a \& (b + c)$$

Математические операции сложения, вычитания и равенства знакомы каждому, что же касается логических операторов, отметим, забегаая немного вперед, что пропозициональная связка $\neg$ и оба квантора $\forall$ и $\exists$ являются унарными (одноместными) операторами, в то время как связки $\sim$, $\supset$, $\&$, $\vee$ относятся к числу бинарных операторов. Это станет более очевидным, когда очередь дойдет до определения правильно построенных выражений – термов и предложений – формул системы, а также при построении таблиц истинности для пропозициональных связок и при представлении постулатов теории.

Будучи элементами предметного языка – языка логико-математического формализма, операторы определяются неявно посредством постулатов, в которых они фигурируют. Будучи же объектами рассмотрения метаязыка – языка, на котором исследуется формальная система, они, в предположении двузначности логических функций, определяются явно – посредством так называемых таблиц истинности. К тем и другим мы вернемся позже, а пока наряду с названиями операций приведем не полный список тех выражений естественного языка, которые с большей или меньшей точностью передают смысл этих символов; если посмотреть с другой стороны, это список выражений, относительно точной формализацией которых являются логико-математические операции.

Таблица 1.2
**Исходные логико-математические
операции и соответствующие выражения**

Операция	Символ	Соответствующее выражение
Эквивалентность	$\sim$	эквивалентно; тогда и только тогда; равносильно; равнозначно; принимает одни и те же значения
Импликация	$\supset$	влечет; если ..., то; только если
Конъюнкция	$\&$	и; как ..., так и; вместе с
Дизъюнкция	$\vee$	или; ... или ... или оба; и/или
Отрицание	$\neg$	не; неверно, что; не имеет места
Квантор всеобщности	$\forall$	для любого; для всех; каждый; всякий; все без исключения
Квантор существования	$\exists$	для некоторых; существует; есть такой ..., что
Равенство	$=$	равно; одно и то же; одинаково
Сложение	$+$	сложить; прибавить; суммировать; плюс
Вычитание	$-$	вычесть; отнять; минус

Заметим, что в высказываниях типа $\forall x P(x)$ (“все x обладают свойством $P(x)$ ”) и $\exists x P(x)$ (“существует x , обладающий свойством $P(x)$ ”) переменная x связывается кванторами наподобие того как переменная в определенном интеграле связывается знаком интеграла, поэтому оба высказывания в целом уже не зависят от какого-либо значения этой переменной. В противоположность *свободной* переменной такая переменная называется *связанной*; говорят соответственно о свободном и связанном вхождении переменной.

Другой важный момент заключается в том, что число независимых пропозициональных операций может быть сведено к двум, например $\neg$ и $\&$, или $\neg$ и $\vee$, или $\neg$ и $\supset$ и даже к одной-единственной, называемой символом (штрихом) Шеффера, операции $|$. Интересно, что если, как отмечается в [Карри, 417], одни известные логики, в частности в знаменитом трактате [Whitehead, Russell], “считают эту идею большим открытием”, другие, например в популярной в свое время работе [Гильберт, Аккерман], – “просто любопытным фактом”. Сам факт сводимости всех пропозициональных связок к единственной операции обнаружен Пирсом еще в конце прошлого столетия, но остался тогда незамеченным, см. [Гильберт, Бернайс 1982, 77], а предложенный после [Sheffer] символ $|$ вводится выражением $A|B$ вместо $\neg A \vee \neg B$ (“ A и B исключают друг друга”). Отсюда отрицание $\neg A$ выражается через исходный символ Шеффера как $A|A$,

дизъюнкция $A \vee B$ как $(A|A)|(B|B)$

конъюнкция $A \& B$ как $(A|B)|(A|B)$

импликация $A \supset B$ как $A|(B|B)$

еще более сложное выражение получается для эквивалентности. Словом, сокращение числа исходных операций сопровождается усложнением логических формул, следовательно первоначальный выигрыш в количестве операций оборачивается впоследствии громоздкими, труднообозримыми выражениями. Принимая это во внимание, оптимальным мы считаем вариант с пятью традиционными пропозициональными связками, не забывая, однако, что в принципе можно обойтись и меньшим их количеством, а в пределе даже одной операцией. Главное требование здесь не в минимизации количества операций, а в полноте их списка, означающей возможность сведения всех существующих логических и математических операций, в первую очередь математической операции бесконечного перехода $\lim$, к исходным. Из математической логики и исследований по основаниям математики известно, что это действительно возможно, хотя вновь ценой серьезных усложнений. Так, если символ $\neq$ (“не равно”) достаточно просто выражается через $\neg$ и $=$ ($a \neq b$ есть просто сокращение для $\neg a = b$), то для операции $<$ (“меньше”) логико-математическая формула, содержащая квантор $\exists$, значительно сложнее, и уже гораздо более сложны формулы для предела числовой последовательности и предела функции. Поэтому без сокращений практически невозможно обойтись; более того, применение новых символических средств, обеспечивающих более компактную запись выражений математики, всегда было и остается одним из источников ее непрерывного прогресса и растущего могущества. Надо лишь всегда иметь в виду, что любое математическое выражение, любая содержащая подобные символы формула есть не что иное как сокращенная запись логико-математического выражения, или формулы, допускающей использование только десяти исходных символов.

При этом, как и в случае логических операций, возникает законный вопрос: почему именно три и почему именно *эти* три математические операции взяты в качестве исходных? Нельзя ли начинать не с операций сложения и вычитания, а допустим, с умножения и деления? Этот нетривиальный вопрос вместе с другими будет обсуждаться при рассмотрении аксиоматики формальной математики, а пока скажем, что данный набор является результатом селекции, обусловленной жесткими требованиями, которые предъявляются к формализму системы ЛМФ.

1.3. Термы и формулы. Нуль

Имея в своем распоряжении алфавит системы ЛМФ (нуждающийся еще в уточнении), можно приступить к рассмотрению правильно построенных выражений формальной системы, называемых термами и формулами. Аналогами термина в грамматике естественного языка являются “слово”, “подлежащее”, “дополнение”, аналогами формулы – “предложение”, а также “суждение”, хотя из-за некоторой неоднозначности термина “суждение” его сопоставление с формулой выглядит несколько натянутым. Задача состоит в том, чтобы правильно построенные последовательности логических и математических символов уметь отличать от неправильно построенных, а слова формального языка – термы – от предложений – формул.

Определение терма

- 1 Все логические предметные переменные, все математические числовые переменные и функции-аргументы суть термы
- 2 Все простые и сложные математические функции, все постоянные и все функционалы суть термы
- 3 Если $\hat{A}$ оператор, а F функция, то $\hat{A}F$ – терм
- 4 0 есть терм
- 5 Если p терм, то $\neg p$ также есть терм
- 6 Если p и q термы, то $p + q$, $p - q$ также суть термы
- 7 Других термов, помимо определенных в 1–6, нет

Определение формулы

- 1 Все высказывания (нульместные предикаты) суть формулы
- 2 Все предикаты $P(x_1, \dots, x_n)$ и все предикатные переменные суть формулы
- 3 Если p и q термы, то $p = q$ есть формула
- 4 Если A и B формулы, то $A \sim B$, $A \supset B$, $A \& B$, $A \vee B$, $\neg A$ также формулы
- 5 Если A формула, а x переменная, то $\forall x A$ и $\exists x A$ суть формулы
- 6 Других формул, помимо определенных в 1–5, нет

Все ранее выделенные логические и математические переменные и функции охвачены этими определениями и все десять первичных операций использованы в правилах построения (правилах образования) новых термов и формул. Любая конечная последовательность выделенных графических знаков, полученная применением этих правил, дает правильно построенные термы и формулы системы. Два различных терма это всегда две несовпадающие правильно построенные комбинации символов, которые тем не менее могут содержательно обозначать один и тот же объект, например определенное число. Аналогично обстоит дело с формулами. Обратим также внимание на принципиальное отличие математических операций сложения и вычитания от равенства: применяя к термам p и q операции $+$ и $-$, получаем лишь новые термы $\neg p$, $\neg q$, $p + q$, $p - q$, в то время как применение операции $=$ дает математическую формулу $p = q$. Далее, определения терма и формулы фиксируют существенное отличие логических функций от математических: высказывания и предикаты являются формулами, а все математические функции, функционалы и операторные выражения типа $\hat{A}f(x_1, \dots, x_n)$ – термами. Поэтому логические операции применяются только к формулам, приводя к другим формулам, а математические операции применяются только к термам, образуя либо новые термы либо формулу.

Логическое исчисление, а следовательно и вся формальная система, начинается с логически неделимых атомов – высказываний, являющихся не словами, а предложениями формального языка, оцениваемыми как истинные либо ложные. Здесь следует указать и на существование

формальных систем многозначных логик – с большим чем два и даже бесконечным множеством значений истинности [Post; Лукасевич; Goddard, Routley], и формальных систем модальных логик начиная с работы [Lewis], добавляющих к обычным операторам модальные операторы $\Box$ (“необходимо”) и $\Diamond$ (“возможно”) [Lewis, Langford; Фейс]. Нас тем не менее вполне устраивает классический, традиционный вариант исчисления с двузначной логической функцией, предопределяющей во многом характер логических постулатов, к обсуждению которых мы подошли вплотную. Но прежде следует еще раз обратиться к основополагающему понятию величины, уже с учетом последних двух определений.

В отличие от термина и формулы, трудно даже в грубом приближении подобрать подходящие аналоги в естественном языке для научной категории *величина*, объединяющей множество разнородных на первый взгляд конструкторов логики, математики и физики. При определении термина и формулы понимание величины как родового, по отношению к переменной и функции понятия дополняется конструктивно правилами построения новых величин из исходных. Если всё же попытаться провести сравнение с единицами естественного языка, окажется, что величина может быть и буквой алфавита и словом и предложением и соответствующим образом организованным набором букв или слов или предложений, причем величина-буква может обозначать и отдельное слово и даже предложение. К тому же для таких величин как функции и операторы едва ли удастся подобрать достаточно близкий по строению и назначению аналог естественного языка. Более полным обсуждением понятия величины имеет смысл заняться позже, при конкретном рассмотрении математических и особенно физических величин в последующих главах. Это тем более важно, что величина является основным понятием теории ЛМФ, стержнем, пронизывающим всю структуру теории снизу доверху, от логических атомов до физических постоянных, от исходных переменных логики до матриц и тензоров. При переходе с одного уровня формализма теории на другой понятие величины наполняется конкретным содержанием, поскольку каждый такой переход с необходимостью сопровождается введением новых фундаментальных величин, генетически и формально связанных с исходными. И уже сейчас можно говорить о триединой теории как о теории связей (в широком смысле слова) между логическими, математическими и физическими величинами.

1.4. Логические постулаты

Прекрасная изученность предмета избавляет нас от необходимости углубляться в дебри аксиоматики, поэтому ограничимся лишь краткими сведениями и комментариями. Изложение и представление аксиом и правил вывода (преобразования) логического исчисления в капитальных работах [Гильберт, Бернайс 1982, 96, 142; Клини 1973, 467; Новиков, 72–73, 192–193], хотя и несколько различается, но в принципе не столь существенно, и мы ориентируемся на работу [Клини 1973], придерживаясь по преимуществу используемой в ней символики и терминологии.

Простейшие логические функции – высказывания в классическом исчислении предикатов – могут принимать лишь два значения, которые обозначим через И (истина) и Л (ложь) вместо традиционных t (truth) и f (false). Значениям И и Л формулы A соответствуют значения Л и И формулы $\neg A$, то есть $\neg A$ истинно только тогда, когда A ложно, и ложно только тогда, когда A истинно. Такова вполне естественная интерпретация истинностной формулы $\neg A$ в теории моделей двузначной формальной логики. Истинностная таблица остальных пропозициональных функций, однозначно определяющая символы $\sim$, $\supset$, $\&$, $\vee$, выглядит следующим образом:

Таблица 1.4
Истинностная таблица
пропозициональных функций

A	B	$A \sim B$	$A \supset B$	$A \& B$	$A \vee B$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	И	Л	Л

Отсюда видно, что эквивалентность $A \sim B$ истинна только тогда, когда A и B оба либо истинны либо ложны; импликация $A \supset B$ ложна только тогда, когда A истинно, а B ложно; конъюнкция $A \& B$ истинна только в случае истинности и A , и B ; дизъюнкция $A \vee B$ ложна тогда, когда A и B оба ложны и истинна в остальных случаях. Если теперь логические *атомы* A и B соединить импликацией и дизъюнкцией в логическую формулу $A \supset A \vee B$ и составить таблицу истинностных значений последней, то легко убедиться, что независимо от значений подформул A и B составная формула истинна во всех случаях. Формула, являющаяся истинной при произвольном распределении истинностных значений подформул $A, B, C, \dots$, это по существу тавтология; такие формулы называют тождественно истинными, или общезначимыми. Сходные рассуждения применимы к формулам, содержащим предикаты и кванторы. Совершенно очевидно, что именно из множества тождественно истинных формул должны выбираться логические аксиомы, точнее схемы аксиом, которые конкретными аксиомами становятся тогда, когда вместо произвольных A, B, C подставляются конкретные формулы. Пятнадцать аксиомных схем вместе с тремя правилами вывода (правилами преобразования) образуют в совокупности систему постулатов классического исчисления предикатов, см. [Клини 1973, 467], одновременно являющихся логическими постулатами системы ЛМФ.

- $L_1 \quad A \supset (B \supset A)$
- $L_2 \quad (A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
- $L_3 \quad \frac{A, A \supset B}{B} \quad \text{modus ponens, или } \supset\text{-правило}$
- $L_4 \quad A \supset (B \supset A \& B)$
- $L_5 \quad A \& B \supset A$
- $L_6 \quad A \& B \supset B$
- $L_7 \quad A \supset A \vee B$
- $L_8 \quad B \supset A \vee B$
- $L_9 \quad (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
- $L_{10} \quad (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
- $L_{11} \quad \neg \neg A \supset A$
- $L_{12} \quad (A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \sim B))$
- $L_{13} \quad (A \sim B) \supset (A \supset B)$
- $L_{14} \quad (A \sim B) \supset (B \supset A)$
- $L_{15} \quad \forall x A(x) \supset A(r) \quad \forall\text{-схема}$
- $L_{16} \quad A(r) \supset \exists x A(x) \quad \exists\text{-схема}$

$$L_{17} \quad \frac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)} \quad \forall\text{-правило}$$

$$L_{18} \quad \frac{A(x) \supset C}{\exists(x) A(x) \supset C} \quad \exists\text{-правило}$$

Первые четырнадцать постулатов, взятые в отдельности, образуют аксиоматику исчисления высказываний, добавление же четырех постулатов L_{15} – L_{18} приводит к исчислению предикатов. Возвращаясь к ранее сказанному относительно выбора исходных логических операций, следует заметить, что с уменьшением их числа уменьшается и число аксиомных схем. Так, система аксиом исчисления высказываний Гильберта и Бернаиса с пятью пропозициональными связками состоит из пятнадцати схем аксиом, по три на каждую связку, а вот система Фреге, построенная с помощью импликации и отрицания, содержит уже только шесть аксиом, система Рассела и Уайтхеда в *Principia Mathematica*, где импликация определяется через дизъюнкцию и отрицание, состоит из четырех аксиом для импликации и дизъюнкции, а если брать за исходное символ Шеффера, можно вообще обойтись единственной тождественно истинной формулой с единственным правилом вывода, хотя и более сложным, чем *modus ponens*. Используя же *modus ponens* с исходными операциями $\supset$ и $\neg$, можно снова всё свести к единственной формуле-аксиоме, причем, как показали Лукасевич и Собоциньский, имеется много различных формул, пригодных для этой цели, см. [Гильберт, Бернаис 1982, 94–95]. Впечатляющая, конечно, минимизация первичных средств, но, как и раньше, при выборе исходных операций это не так важно, хотя бы потому, что все перечисленные и многие другие аксиоматические системы исчисления высказываний формально эквивалентны и в принципе равноправны. Можно по идее брать любую из них, а тот или иной выбор диктуется главным образом утилитарными соображениями, которые конкретно в нашем случае перевешивают преимущества той кажущейся простоты, которая, мы знаем, приводит затем к громоздким построениям и потере ясности.

Упомянутый выше постулат L_3 – *modus ponens*, являющийся одним из трех правил вывода (преобразования) системы и называемый также правилом отделения, означает процедуру перехода от двух произвольных формул A и $A \supset B$ к формуле B . Два других правила вывода L_{17} и L_{18} позволяют переходить

от $C \supset A(x)$ к $C \supset \forall x A(x)$

и от $A(x) \supset C$ к $\exists x A(x) \supset C$

где x – произвольная переменная, $A(x)$ и C – произвольные формулы, а явное указание переменной x в формуле $A(x)$ делается с целью ее противопоставления формуле C , которая не должна содержать свободных вхождений x , в то время как для A это допускается. Если вместо свободных вхождений x в $A(x)$ подставить произвольную переменную r , обозначив результат такой подстановки через $A(r)$, можно получить общезначимые формулы

$$\forall x A(x) \supset A(r) \quad \text{и} \quad A(r) \supset \exists x A(x)$$

взятые в качестве постулатов L_{15} и L_{16} системы. Общезначимость этих и всех остальных аксиомных схем доказывается методами теории моделей или более тонкими методами теории доказательств. Ни тем ни другим мы заниматься не будем, поскольку обсуждение подобных вопросов, см. [Гильберт, Бернаис 1982; 1982a; Клини 1957; 1973; Чёрч; Новиков], а также [Аракелян 1979], увело бы нас в сторону, так же как обсуждение непротиворечивости, независимости и полноты системы аксиом, проблем разрешимости, выводимости и доказуемости, не говоря уж о более частных вопросах, касающихся правил замены, подстановки и т.д. Поэтому первую – преимущественно логическую, но включающую в себя и исходные понятия формальной математики – часть программы по построению логико-математического исчисления теории ЛМФ мы в целом считаем выполненной.

1.5. От логики к математике: проблема выбора системы аксиом

Разобравшись с логическими корнями, подумаем над тем, каким должен быть математический ствол системы ЛМФ. Это один из решающих моментов построения, усложняемый существованием десятков математических аксиоматик, основанных на логическом исчислении предикатов. Напомним, что при выборе логического основания практически не возникало серьезных коллизий. Мы с порога, без обсуждения и обоснования, которое сочли излишним, отвергли формальные системы многозначных и модальных логик как не отвечающие существу дела, отдав предпочтение классическому исчислению предикатов. Преимущество этого логического исчисления в том, что оно в различных своих модификациях служит естественной, надежной и достаточно простой основой для всевозможных математических систем и потому может считаться универсальным логико-дедуктивным фундаментом для большей части формальной математики. Теперь перед нами стоит задача отыскать, образно говоря, среди целого леса стволов с одинаковыми почти корнями ствол того уникального дерева, не зная при этом, существует ли оно на самом деле. Постановка и решение задачи вроде этой возможны лишь при условии ясного понимания общей цели и при наличии уже имеющихся конечных результатов. Очень часто система аксиом, подводя фактически итог содержательным исследованиям, представляется как начало дедуктивно разворачиваемой системы, по завершении которой снова обращаются к содержательному прототипу системы и/или ищут другие интерпретации, расширяющие сферу ее приложимости. Теория, в частности физическая, до аксиоматики должна “дорасти” и аксиоматику должна заслужить; только тогда аксиоматический метод является во всем своем блеске, не только придавая строгость, логическую ясность, но и выявляя новые связи и увеличивая научный потенциал теории. С другой стороны, попытка аксиоматизации “сырой”, недостаточно глубоко продуманной и еще окончательно не сформировавшейся физической концепции в надежде на эвристические возможности аксиоматического метода смахивает на усилия утопающего вытащить себя за волосы из воды.

Добавим также, что оставаясь в рамках логико-математического формализма, можно исследовать систему аксиом на полноту, непротиворечивость, независимость и т.д., но что касается вопроса, насколько выбор той или иной системы аксиом необходим для данной физической теории, то это вопрос больше эмпирический, связанный с содержательным обоснованием научной конструкции в целом. Следует признать, что при всей исключительности формальных требований, при всей важности таких трудноуловимых критериев как красота и простота начал физической теории, признание или отрицание теории в конечном счете определяется точностью ее предсказаний при сравнении теоретических прогнозов с данными, полученными опытным путем. Без этого даже самая формально безупречная и изящная конструкция не станет работающей физической теорией, а лишь пополнит многочисленную коллекцию красивых научных безделушек. Сказанное, казалось бы, избавляет от необходимости отдельно заниматься обоснованием математических аксиом системы ЛМФ, но не так всё просто и есть достаточно весомые обстоятельства, заставляющие несмотря ни на что заняться этим, притом именно сейчас. Решение вопроса, какая нам *нужна* система математических аксиом, значительно облегчится, если удастся выяснить, какая система аксиом здесь заведомо *не подходит* и *почему*. Одновременно это поможет глубже вникнуть в сущность проблемы и тогда уже можно будет взяться за ее окончательное решение.

1.6. Аксиомы Пеано. Системы типа N

В конце прошлого века итальянский математик Пеано, следуя Дедекинду, а также Грассману, предложил систему из пяти аксиом для арифметики натуральных чисел. Обозначив введенным позже символом $'$ – “следующий за”, “прибавление единицы”, “плюс 1” – операцию перехода от натурального a (в начальном варианте вместо 0 использовалась 1) к следующему члену натурального ряда a' , можно представить аксиомы Пеано следующим образом.

- 1 0 (нуль) есть натуральное число
- 2 Если a натуральное число, то a' также натуральное число

3 Из $a' = b'$ следует $a = b$

4 Для любого a $a' \neq 0$

5 Если подмножество S множества натуральных чисел N

i) содержит 0 и

ii) вместе с каждым числом a содержит a' , то S совпадает с N

Операции сложения, умножения и свойства нуля задаются с помощью нескольких содержательно очевидных определений:

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a + b' = (a + b)'$$

$$a \cdot b' = (a \cdot b) + a$$

С позиций строгой формализации первая и вторая аксиомы Пеано, фиксирующие характерную особенность конкретного, притом дискретного, числового множества, должны быть отнесены к правилам образования (термов), а все четыре определения, касающиеся свойств операций сложения и умножения, – наоборот – к аксиомам формальной системы. Приняв это во внимание и используя логические операции, придем к одному из известных вариантов системы аксиом арифметики натуральных чисел:

$$P_1 \quad a' = b' \supset a = b$$

$$P_2 \quad a = b \supset a' = b'$$

$$P_3 \quad \neg(a' = 0)$$

$$P_4 \quad a = b \supset (a = c \supset b = c)$$

$$P_5 \quad a + 0 = a$$

$$P_6 \quad a \cdot 0 = 0$$

$$P_7 \quad a + b' = (a + b)'$$

$$P_8 \quad a \cdot b' = a \cdot b + a$$

$$P_9 \quad A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$$

Аксиомная схема P_9 это принцип полной индукции, утверждающий, что свойство A , установленное для начального элемента и произвольной пары следующих друг за другом чисел x и x' , распространяется на весь натуральный ряд. Хотя и несколько длинная и на первый взгляд замысловатая, но зато точная и если приглядеться весьма удачная формулировка этого основополагающего принципа арифметики натуральных чисел такова. “Пусть бесконечная последовательность математических предложений $A_1, A_2, A_3, \dots$ представляет в своей совокупности теорему A . Исходим из следующих допущений: а) с помощью какого-либо математического рассуждения можно показать для любого целого числа r , что из справедливости утверждения A_r вытекает справедливость утверждения A_{r+1} , и б) известно, что предложение A_1 верно; в таком случае все утверждения последовательности справедливы, и тем самым теорема A доказана” [Курант, 45]. Обозначая формулу с переменной a через $U(a)$, можно представить P_9 в виде схемы индукции [Гильберт, Бернайс 1982, 325]

$$\frac{U(0) \quad U(a) \supset U(a')}{U(a)}$$

добавляющей к правилам вывода L_3, L_{17}, L_{18} исчисления предикатов чисто математический принцип доказательства. Аксиомы $P_1 - P_9$ вместе с постулатами $L_1 - L_{18}$ исчисления предикатов образуют в совокупности одну из систем типа N , предназначенную для формализации арифметики натуральных чисел.

Той же цели могут, конечно, служить другие наборы математических аксиом. В качестве примера сошлемся на систему аксиом, представленную в работе [Новиков, 282, 291]. Расширение символического аппарата исчисления предикатов здесь в основном сводится к добавлению индивидуального предмета 0 и предметной функции $\lambda(x)$, сокращенно записываемой в виде x' . В содержательном понимании этому соответствуют нуль и функция перехода от элемента x к непосредственно следующему за ним элементу x' , конкретно от натурального числа n к $n + 1$. Обозначая аксиомы данного исчисления как одного из возможных вариантов формальной арифметики натуральных чисел через N'_j и применяя принятую нами систему обозначений, имеем:

$$N'_1 \quad a = a$$

$$N'_2 \quad a = b \supset (A(a) \supset A(b))$$

$$N'_3 \quad \neg(a < a)$$

$$N'_4 \quad a < b \supset (b < c \supset a < c)$$

$$N'_5 \quad a < a'$$

$$N'_6 \quad A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$$

Система N' , имеющая интерпретацию лишь на множествах подобных натуральному ряду, последовательно составлена из двух аксиом равенства, трех аксиом порядка с новым индивидуальным предикатом $<$, содержательно означающем “меньше”, и из аксиомы полной индукции. Дальнейшее построение формализма арифметики натуральных чисел связано с необходимостью введения арифметических действий, таких как сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень. Это осуществляется посредством рекурсивных функций, определяемых на основе исходных функций исчисления. Приводить рекурсивные равенства системы N' [там же, 310–322] мы не станем, но отметим следующее вполне очевидное обстоятельство. При построении формальной арифметики натуральных чисел, как и любого другого достаточно богатого формализма числовой математики требуется в обязательном порядке введение арифметических действий, которые одними лишь аксиомами не определяются. Совершенно недопустимо при этом пользоваться какими-либо средствами, не входящими в круг дозволенных средств рассматриваемого исчисления. Другими словами, в соответствии с существующими стандартами строгости построения логико-дедуктивных исчислений все вновь вводимые теми или иными разрешенными в рамках данного формализма способами математические операторы должны во всех без исключения случаях выражаться через исходные начала системы.

Тысячелетиями в математике всё вращалось вокруг натуральных чисел, и не случайно, что именно к формальной арифметике натуральных чисел пытались свести с целью ее окончательного обоснования всю математику Гильберт и его последователи; не случайно появление и широкое распространение формальных систем типа N ; не случайно, что именно на понятии натурального числа пытался строить свою математику интуиционизм. Безуспешность подобных попыток, как и несостоятельность самой идеи первичности натуральных чисел в любом ее исполнении, достаточно подробно, с обсуждением и некоторых технических деталей, рассмотрена в [Аракелян 1981; 1989], поэтому сказанное там лишь дополним ссылками, вскрывающими историческую подоплеку идеи, а критику ограничим замечаниями общего характера.

1.7. Натуральные числа

Исторические причины, по которым натуральные числа всегда признавались первичными по отношению к остальным числам, вполне очевидны: натуральные числа – необходимый элемент счета, используемый еще в доисторические времена, понятие натурального числа всегда казалось настолько привычным, простым, изначальным и незаменимым, что долгое время не возникало потребности в его определении посредством других понятий. Это по сути лишь пересказ того, что можно найти в различных энциклопедических источниках. Для определенности сошлемся на один из них: “Понятие натурального числа, вызванное потребностью счета предметов, возникло еще в доисторические времена. ...Вопрос об обосновании понятия натурального числа долгое время в науке не ставился. Понятие натурального числа столь привычно и просто, что не возникало потребности в его определении в терминах каких-либо более простых понятий. Лишь в середине 19 в. под влиянием развития аксиоматического метода в математике, с одной стороны, и критического пересмотра основ математического анализа – с другой, назрела необходимость обоснования понятия количественного натурального числа” [Фаддеев, 394–395]. Знаменательно и то особое место, которое натуральные числа занимали в науке и философии, мифологии и религии, магии и оккультизме, в обыденном сознании и т.д. В приписываемых древним пифагорейцам изречениях типа “Все вещи суть числа”, “Мир создан в подражание числам”, “Бог положил числа в основу мирового порядка”, см. например [Рассел, 54; Ван дер Варден, 129–130], имеются в виду исключительно натуральные числа, поскольку и тогда и долгое время спустя только они и считались настоящими, *натуральными*, в противовес числам *отрицательным*, *иррациональным*, *трансцендентным*, *мнимым*. Отсюда, кстати, шок, который испытали пифагорейцы при обнаружении иррациональных чисел, в результате чего “Начала” Евклида, включая доказательство теоремы Пифагора и разделы, касающиеся иррационального числа золотого сечения (“пропорции”), приобрели сугубо геометрическую направленность, хотя многие разделы “Начал” намного удобнее излагать арифметически. С позицией пифагорейцев через два с лишним тысячелетия перекликается восторженное заявление: “Целые числа сотворил господь бог, а всё прочее – дело людских рук”, см. [Стройк, 222], принадлежащее математику Кронекеру, не внявшему, как впрочем и многие другие, предостережению служителя бога и философа Беркли: “...Число есть всецело создание духа. ... Число настолько очевидно относительно и зависимо от человеческого познания, что странно было бы подумать, чтобы кто-нибудь мог приписать ему абсолютное существование вне духа” [Беркли, 176]. Без покрова мистики и священного трепета, но вполне в духе пифагорейской традиции исключительности и первичности натуральных чисел предлагались различные программы обоснования математики и строилась упомянутая выше *Фундаментальная теория* Эддингтона. Можно при желании привести несметное множество других примеров из истории различных народов, эпох, культур, областей знания, мистики и вообще человеческой деятельности, со всей определенностью указывающих на ту исключительную роль, которая всегда приписывалась обычно называемым просто числами натуральным числам. Историческую преемственность этих идей, почти дословно повторяемых через века, можно проследить по высказываниям известных авторов, см. [Секст Эмпирик, 167, 169, 171; Диоген Лаэртский, 338–339; Евклид, 9; Давид Анахт, 45; Кантор, 271, 411; Гоббс, 142, 143; Лейбниц, 97; Локк, 255–257; Пуанкаре, 162; Вейль, 127; Френкель, Бар-Хиллел, 106–107].

Сказанного, думается, достаточно для понимания того, какой глубокий пласт человеческой культуры пронизывается феноменом натурального числа, для осознания силы исторической традиции, к тому же долгое время не умеряемой наличием серьезных контраргументов или альтернатив. Уже само название говорит о многом. Ведь за названием каждого типа чисел стоит концепция, связанная с определенным уровнем понимания ее природы, онтологического статуса и содержания. Не случайно ряд 1, 2, 3, ... носит название *натурального*, то есть исконно природного. Если вообще обратиться к семантике слов, используемых для обозначения и различения разных типов чисел, то можно четко выделить две противоположные группы. “Настоящие”, “хорошие” числа – *натуральные*, *положительные*, *рациональные* –

образуют одну группу, “ненастоящие”, “плохие”, “странные” – *отрицательные, иррациональные, трансцендентные* – другую. Нетрудно заметить, что в этой исторически сложившейся терминологии настоящими считаются только те числа, которые могут быть образованы из натуральных посредством арифметических действий сложения, умножения и деления. Древние греки числами считали только натуральные числа, наложив на остальное табу, которое долгое время оставалось в силе, о чем недвусмысленно свидетельствуют и приведенные выше высказывания. Кстати, отрицательные числа, известные ранее на востоке, появились в Европе лишь в XIII веке (Леонардо Пизанский, известный больше как Фибоначчи). Получается, что от доисторического человека до средних веков большая часть человечества жила в состоянии счастливого неведения относительно существования нехороших чисел, нарушающих гармонию натурального мира и способных испортить настроение многим математикам и философам, от Пифагора до современных интуиционистов. Другая, меньшая часть – эти самые математики и философы – либо просто игнорировала, либо пыталась всячески принизить роль этих чисел. Производить расчеты, связанные с фактическим использованием отрицательных чисел, всё же приходилось, а несоизмеримые отрезки, то есть иррациональные числа – факт, который произвел ошеломляющее впечатление еще на древних греков, но... факты фактами, а догма на то и догма, чтобы не считаться с ними. Правда, впоследствии произошло великое примирение и все числа этих двух групп были благосклонно признаны *действительными, вещественными*, а значит настоящими. И вот уже действительным числам противопоставляются числа *мнимые*, проще говоря, “воображаемые”.

Дело здесь, разумеется, не в самой терминологии, а в том, что за ней стоит. Концепция избранности натурального ряда это определенный стиль математического мышления, который на практике нередко пытался, а порой пытается и сегодня уложить математический результат в прокрустово ложе допустимых решений. Об этом свидетельствует классический пример тысячелетних поисков точного значения числа π [Beckmann; O'Connor, Robertson]; список почти всех результатов определения π с древнейших времен до наших дней можно найти в [Plouffe]; библиография по числу π из более чем ста названий дается в [Finch], см. также [History of Pi].

Не вдаваясь в детали, которые нетрудно найти в указанных выше источниках, можно в истории определения числа π выделить четыре этапа, отражающих различные уровни понимания фундаментальных математических величин подобного рода. На первом, *наивно-эмпирическом* – от древнего Египта до Пифагора и пифагорейцев – π определяется грубо экспериментально, “на глаз” как натуральное число 3 либо как отношение натуральных величин типа 255/81. На втором, *экспериментально-геометрическом* – от пифагорейцев и особенно Архимеда до ван Цейлена – этапе π вычисляется трудоемким, требующим колоссальной вычислительной работы методом вписанных и описанных многоугольников. Этот метод дает медленно сужающийся интервал значений, сходящихся к искомому числу. Он практически исчерпал себя тогда, когда посвятивший этому большую часть жизни Лудольф ван Цейлен нашел 35 верных десятичных знаков (Лудольфово число). После Чжу Чунчжи (7 верных знаков) найти хорошее рациональное приближение для π уже не удастся, а надежда на получение точного результата в виде дробного отношения натуральных чисел становится всё более тщетной. Третий этап, “*аналитический*” – от Ньютона до Ламберта – связан с пониманием числа π не просто как отношения длины окружности к диаметру, но также как сумм самых различных по виду бесконечных числовых рядов, а также как бесконечных произведений. Четвертый этап, “*космический*” – от Ламберта до Линдемана и от Линдемана до наших дней. Наконец выясняется числовая природа π , его иррациональность и, более того, трансцендентность. О конечном целочисленном представлении уже нет речи. Развитием науки π окончательно утверждается в роли одной из очень немногих фундаментальных констант математики и естествознания, приобретает большое значение в понимании связи арифметики с геометрией, геометрии с физикой, математики с естествознанием и природой. Конечно, космический смысл приписывался числу π и раньше, особенно на первых двух

этапах и видимо с самого начала, но геометрическое представление является чересчур упрощенным, аппарат был слабо разработан, а антропоморфные моменты были тогда еще слишком сильны. Только на последней стадии пришло понимание того, что язык целых чисел, строго говоря, совершенно непригоден для полноценного представления числа π . Что же касается десятичного или какого-либо другого представления, то здесь это всего лишь “технологическая” точность, поскольку сколько бы десятичных знаков ни выписать, останется еще бесконечное число ненаписанных знаков, в расположении которых не обнаружено строгой закономерности. С этой точки зрения нет принципиальной разницы между точностью числовых расчетов Архимеда (три верных знака), ван Цейлена (35 знаков), Шенкса (1874 г., 528 знаков) и триллионов знаков, получаемых на современных суперкомпьютерах.

На живом примере поисков значения числа π можно в общих чертах проследить эволюцию понимания природы математического числа вообще. В самом кратком изложении она такова. Вначале были только натуральные числа, безальтернативные и сакрализованные. Позже обнаруженные и в буквальном смысле выпадающие из ряда иррациональные числа (несоизмеримые отрезки) оказались под строгим запретом и были ловко закамуфлированы, например, геометрическими построениями “Начал” Евклида. По мере развития математического анализа в Новое время двухтысячелетняя программа “натурализации” математики (квадратура круга, трисекция угла, поиск рациональных значений числа π и других математических величин и т. д.) выглядела всё более сомнительной, доказательством же иррациональности, а затем и трансцендентности чисел π и e в конце прошлого века здесь, казалось, поставлена точка.

Однако притягательная сила натуральных чисел, видимо, слишком велика, а идея их главенствующей роли в математике, в частности в числовой математике, слишком глубоко укоренилась в сознании, чтобы так просто признать очевидное. Не признавали же долгое время пифагорейцы сам факт существования иррациональных чисел, а история, как считают, любит повторяться, притом преимущественно в виде фарса. И вот уже в нашем столетии одна за другой появляется школы обоснования математики, использующие идею первичности натурального ряда. Напомним, что перед нами стоит непростая задача адекватного выбора системы математических аксиом, и это один из наиболее ответственных моментов построения формализма теории ЛМФ. Всё должно быть предельно ясно, вот почему данному вопросу уделено такое место. Сейчас, наверное, есть резон дополнить общие суждения о несостоятельности концепции первичности натуральных чисел уже более конкретным, хотя и кратким анализом указанных программ обоснования математики, в основном наиболее радикально-бескомпромиссной программы интуиционизма.

1.8. Почему математика не может начаться с единицы

В сущности, в основе любой концепции обоснования математики лежит идея ее унификации – сведения к тому или иному минимальному базису исходных принципов и простейших, далее неразложимых понятий, играющих роль “атомов”, первичных объектов математики. Существующие программы логицизма (Фреге, Рассел, Куайн), формализма (Гильберт и его школа), интуиционизма (Брауэр, Вейль, Гейтинг) заметно отличаются друг от друга и от классической теоретико-множественной программы (Кантор) обоснования математики. Но все они едины в признании первичности натуральных чисел по отношению ко всем остальным; общей для всех этих программ является проблема обоснования арифметики натуральных чисел. Согласно основному тезису например логицизма, вся чистая математика может быть логически выведена из арифметики натуральных чисел. Для нас здесь важно то, что во всех этих программах отрицательные, иррациональные, трансцендентные, комплексные, короче, не натуральные числа обычно рассматриваются как нечто вторичное по отношению к числам натуральным, так что последние выступают в качестве исходного начала, своего рода генератора для построения остальных чисел. Один из основателей логицизма Рассел вводил натуральный ряд с помощью аксиомы бесконечности [Russell], формализм гильбертовского типа вводил его с помощью системы аксиом, в первую очередь аксиомы полной индукции

[Гильберт, Бернайс 1982, Гл. VI, §5], что же касается придерживающейся наиболее радикальных взглядов школы интуиционизма, то с основными положениями ее программы лучше познакомиться из первых уст. Согласно ставшему уже чем-то вроде девиза высказыванию Гейтинга, одного из лидеров интуиционизма, “Элементарное понятие натурального числа, знакомое каждому мыслящему существу, является фундаментальным в интуиционистской математике. ... Мы утверждаем, что оно достаточно ясно для того, чтобы можно было на нем построить математику. ...

1. Оно легко понимается любым человеком, имеющим минимальное образование.
2. Оно универсально применимо в процессе счета.
3. Оно лежит в основании построения анализа” [Гейтинг, 16, 25].

Известно, что проблему обоснования математики ни одна из программ решить так и не смогла. Сама же интересующая нас идея, выступающая в нашем столетии в обличье формализмов типа аксиоматической системы N , должна быть отвергнута по сугубо принципиальным соображениям, излагаемым ниже. Некоторые из них относятся лишь к интуиционистской доктрине, но в основном они направлены против самой идеи примата натурального ряда.

1. Натуральный ряд обычно, хотя и не всегда, начинают с единицы, но последняя, несмотря на свою кажущуюся элементарность и вопреки первоначальным заверениям интуиционистов, при более внимательном, глубоком рассмотрении оказывается в теории чисел и анализе отнюдь не простым, а наоборот, весьма сложным математическим объектом, что признается всеми. Можно, конечно, начинать с 2 или 3 или даже, как это иногда делают, с 4, считая именно двойку (тройку, четверку) первым натуральным числом, однако наша математическая интуиция восстает против этого: ряд, начинающийся не с нуля и даже не с единицы, выглядит надуманно и не очень привлекательно. Хуже всего то, что единицу так или иначе ввести надо, как и нуль, который всегда почему-то очень плохо вписывается в идею изначальности натурального ряда.

2. Концепция, основанная на идее первичности натуральных чисел по отношению ко всем остальным математическим объектам, вынуждена для построения всех чисел – действительных и комплексных – прибегать к весьма искусственным приемам. В частности, отрицательные целые числа $-1, -2, -3, \dots$ так же как только что упомянутый нуль, не могут быть получены из натуральных чисел без дополнительных допущений. Наверное не случайно, что отрицательные числа лишь в XIII веке были завезены Леонардо Пизанским в Европу с Востока, где они также появились позже дробных чисел и тоже далеко не сразу – вначале в Древнем Китае, с VII века в Индии. Но даже в XVI и в XVII вв. многие европейские математики не хотели признавать отрицательные числа и если те всё же появлялись в вычислениях, это их сильно раздражало; назывались такие числа *фигтивными, ложными, невозможными* [Нечаев, 874], другими словами этого не может быть, потому что... Если вернуться в наш век, то ясно одно. Нельзя упрощенно представлять себе дело так, что из понятия натурального числа логически вытекает понятие отрицательного натурального ряда $-1, -2, -3, \dots$, и если точки или палочки интуиционистов служат средством материального представления натуральных чисел, то как тогда представить отрицательные целые числа? Для введения последних необходим какой-то новый принцип, допустим, делающий возможным установление взаимно-однозначного соответствия между теми и другими. Здесь существенно, что новые объекты вроде отрицательных чисел и нуля не строятся из натуральных, а фактически определенным образом вводятся в дополнение к ним.

Между тем основная цель любой математической концепции, стремящейся к унификации математики путем выявления ее первоосновы, остается всё той же: из минимального базиса исходных математических объектов и правил оперирования ими построить, сконструировать все остальные объекты, не выходя за пределы первоначально выбранного базиса. Конечно, в данном случае в исходный базис с самого начала могут быть включены и такие объекты как бесконечный ряд отрицательных чисел вместе с нулем, раз уж процесс их получения нарушает указанное условие. Расширенный подобным образом базис оказывается достаточным для

того чтобы уже без помех построить множество всех действительных чисел. Но, во-первых, это уже *не* натуральный базис, во-вторых, он слишком громоздок, а главное, всё равно не способен решить некоторые очень важные вопросы.

3. Среди них проблема комплексных чисел. Мнимая единица обычно определяется равенствами

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{или} \quad i^2 = -1$$

а множество комплексных чисел как множество чисел типа $x + iy$, где x и y произвольные действительные числа. Не говоря уж об искусственности подобного определения чрезвычайно важной для современной математики величины, которое в сущности является лишь свойством числа i , есть и нечто другое. Совершенно непонятно, почему например мнимая единица в своей же степени равна $e^{-\pi/2}$:

$$i^i = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

В рамках обсуждаемой концепции такое соотношение выглядит загадочным. Действительно, почему это корень квадратный из минус единицы в своей же степени, то есть очень простая комбинация минус единицы и двойки, каким-то непостижимым образом дает комбинацию чисел e , π , 2 , кстати, в десятичной записи равную $0,2078795763\dots$? Это соотношение, получаемое в теории функций комплексного переменного, не поддается никакому рациональному осмыслению в пределах концепции первичности натуральных чисел.

Не менее загадочным выглядит простой пример извлечения корня степени n из единицы. Уравнение

$$x = \sqrt[n]{1}$$

в правой части которого нет ничего кроме натуральных чисел, имеет n корней

$$x_k = e^{2k\pi i/n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

из которых лишь один ($k = 0$) является действительным, а все остальные корни – комплексные.

4. Современную математику невозможно представить без таких величин как константы e и π , между тем они не находят себе никакого разумного объяснения в рамках обсуждаемой концепции, хотя и могут выражаться через натуральные числа с помощью бесконечных рядов и произведений. Притом во многих случаях появление этих констант, в частности при решении различных задач, весьма неожиданно и едва ли предсказуемо, хотя и строго доказано. Множество таких соотношений из различных разделов математики (определенные и несобственные интегралы, бесконечные суммы и произведения, цепные дроби, предельные соотношения, дифференциальные уравнения, вариационные задачи, экстремумы функций, теория вероятностей, теория простых чисел, динамические системы), приведено в монографии [Аракелян 2007]. Непонятно, почему среди бесконечного множества трансцендентных, иррациональных чисел явно выделяется среди остальных небольшая группа фундаментальных констант, появляющихся во всех сферах математики включая такое исконное “владение” натурального ряда как теория простых чисел. Между тем в концепции, первооснову которой составляет натуральный ряд, числа типа π и e выступают как вторичные по отношению к натуральным числам конструкторы, определенным образом из них построенные. Объяснение универсальной значимости и уникальности фундаментальных математических констант входит в прямые обязанности данной концепции, является ее внутренней задачей. Иначе она не методология, не философия и вообще никому не нужна, особенно если учесть те порой очень строгие ограничения, которые налагаются на применимость тех или иных математических понятий и средств во имя доказательства тезиса об исконности натурального ряда. Однако жесткая числовая демократия натурального ряда не в состоянии объяснить появление чисел-аристократов, притом чуждой природы, не подчиняющихся действующим канонам.

Здесь не видно никакого подхода: числа π и e , мнимая единица i и другие, менее значительные константы это как бы пришельцы из другого математического мира, необъяснимые феномены в математической и философской доктрине изначальности натуральных чисел.

Подводя итог сказанному в последних разделах, прежде всего констатируем, что великая тысячелетняя идея, превратившаяся в какой-то момент в стойкий, нерушимый догмат, а впоследствии – в тормозящий развитие предрассудок, пыталась в основном под эгидой аксиоматического метода и формализмов типа системы $\mathbf{N}$ захватить всю сферу чистой математики, а также математического естествознания. Достичь конечной цели или хотя бы приблизиться к ней ни в том ни в другом случае и ни в одной из предложенных программ практически не удалось. Ни сногшибательная история и огромная практическая польза, ни авторитет многочисленной и блистательной плеяды мыслителей разных эпох, ни какие-либо другие факторы не в состоянии компенсировать ее бессилие в решении проблем, касающихся оснований математики и физической теории. Бессилие, порожденное многими достаточно подробно рассмотренными *не*, относящимися как к системе $\mathbf{N}$, так и к понятиям натурального числа и натурального ряда. Математика, даже формальная,

не сводится к системе $\mathbf{N}$ или другим аналогичным системам арифметики натуральных чисел

натуральные числа включая 1 вопреки ожиданию при ближайшем рассмотрении оказываются *не* простыми математическими объектами

с помощью натуральных чисел можно построить множество положительных действительных чисел, но с отрицательными целыми числами справиться как следует уже *не* удастся, тем более *не* справляется интуиция натурального ряда с числами мнимыми, комплексными и математическими константами типа e и π

сложные проблемы теории простых чисел посредством натуральных чисел или функций натурального переменного, как правило, *не* решаются

важнейшие физические величины типа ψ -функции *не* есть функции действительного переменного

не являются таковыми и все специальные функции физической теории

простейшие колебательные процессы выражаются посредством синуса и косинуса, а *не* через функции действительного переменного

выделенные физические числа – безразмерные физические постоянные (исключая такие величины как размерность пространства-времени или, допустим, общее количество истинно фундаментальных частиц) – натуральными числами или же комбинациями натуральных чисел *не* являются

В принципе можно ограничиться одним-единственным *не*: система $\mathbf{N}$ неполноценна в том смысле, что *не* содержит в себе все те первичные элементы, которые необходимы для построения остальных объектов математики, а тем более фундаментальной физики

Между тем это важнейшее требование, которое мы обязаны предъявить к аксиоматической системе, призванной выявить и сохранить единство логики, математики и физики. Прибегая опять к образу дерева, можно сказать, что толстые, тяжелые ветви физической теории не могут держаться на тонком стволе арифметики натуральных чисел, а если смотреть дальше, то и любой формальной системы с ограниченной предметной областью и ограниченными возможностями. Это рассуждение непосредственно наводит на мысль, что могучим ветвям фундаментальной физики а priori непременно нужен могучий математический ствол; иначе говоря, переход от уже представленной универсальной логики к еще неизвестной фундаментальной физике можно осуществить лишь посредством универсальной математики. Всё это не игра слов, а единственный, на наш взгляд, *modus vivendi* триединой системы ЛМФ, который мы и примем пока на веру в качестве рабочей гипотезы.

1.9. Формальные системы G и AG

Искомая формальная система хотя и не так популярна как N, но тоже известна и в первом приближении обозначается символом G [Клини 1973, 259–263]. Ее исходные элементы мы уже фактически рассматривали, остается только внести некоторые уточнения и перейти к аксиомам. Система G содержит следующие формальные символы (понятно, что многоточия, отделяющие друг от друга начальные и конечные буквы латинского и греческого алфавитов, не в счет):

$\sim \supset \& \vee \neg \forall \exists = + - 0 a b c \dots x y z \alpha \beta \gamma \dots \chi \psi \omega () _|$

Это семь логических и три математические операции, расположенные как и раньше в порядке убывающего слева направо ранга, индивидуальный объект 0 (нуль), 26 курсивных букв латинского и 24 строчные буквы греческого алфавита, левая и правая скобки, наконец символ $_|$, снабжая которым переменные $a, b, c, \dots$, можно получить потенциально бесконечное множество новых переменных

$a_| \ a_{||} \ a_{|||} \ a_{||||} \dots b_| \ b_{||} \ b_{|||} \dots$

Хотя по идее можно сильно сократить общее количество символов, исключив, например, из списка все греческие буквы (используемые для обозначения только функций), нам всё же удобно их сохранить. Таким образом язык-объект, или предметный язык, содержит в общей сложности 64 формальных символа, составляющих его алфавит. Всё остальное в этом тексте, в том числе знаки препинания, слова естественного языка, сокращения типа $\equiv, \approx, \psi, \neq, <, >, \lim, \Sigma$ соответствующих логико-математических выражений и т. д., относится к метаязыку – языку, посредством которого исследуется предметный язык. Заметим также, что переменные предметного языка строятся с помощью курсивных латинских букв и черточек, а переменные метаязыка – прямых латинских букв и числовых индексов. Например, символы a_1, b_2, c_4, x_5 являются метаязыковыми обозначениями соответственно предметных переменных $a_|, b_{||}, c_{||||}, x_{|||||}$, обеспечивающими по необходимости более компактную и удобную запись формальных выражений. Если функция одной переменной $f(x)$ целиком построена из четырех символов предметного языка, а в выражении $f(x, y)$ для функции двух переменных метаязыковым символом является только запятая, то в выражении $f(x_1, \dots, x_n)$ для функции многих переменных к метаязыку относятся уже все символы внутри скобок.

Определения термина и формулы даны выше. Напомним, что если под переменными $a, b, c, \dots, x, y, z$ понимать числа, то терминами являются нуль, все переменные и постоянные числа, числовые функции включая сложные функции, функционалы, операторные выражения, а также любые последовательности перечисленных термов, образованные с помощью операций $+$ и $-$ по правилам $-p, p+q, p-q$. Формулами являются равенства типа $p=q$ для термов p и q , а также выражения для формул, образованные посредством пропозициональных связок и кванторов.

Система G, посредством которой осуществляется переход к формальной математике, содержит следующие шесть аксиом:

$$\mathbf{M}_1 \quad a = b \supset (a = c \supset b = c)$$

$$\mathbf{M}_2 \quad a = b \supset a + c = b + c$$

$$\mathbf{M}_3 \quad a = b \supset c + a = c + b$$

$$\mathbf{M}_4 \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\mathbf{M}_5 \quad a + 0 = a$$

$$\mathbf{M}_6 \quad a - a = 0$$

Содержательный смысл аксиом достаточно ясен. Аксиомы $\mathbf{M}_1$ – $\mathbf{M}_4$ фиксируют свойства равенства и сложения, $\mathbf{M}_5$ – уникальное свойство нуля, состоящее в том, что прибавление

нуля к любому a не меняет a , $\mathbf{M}_6$ вводит операцию “ $-$ ” и объект $-a$, противоположный a в смысле равенства их суммы нулю. Таким образом, восемнадцать постулатов $\mathbf{L}_1$ – $\mathbf{L}_{18}$ исчисления предикатов вместе с шестью математическими аксиомами для операций равенства, сложения, вычитания объектов a, b, c и нуля образуют логико-математическую аксиоматику системы $\mathbf{G}$. Но в чем, спрашивается, преимущество системы $\mathbf{G}$ перед другими формальными системами и что следует понимать под бесконечным множеством объектов $a, b, c, \dots$? В отличие от системы $\mathbf{N}$, имеющей единственную интерпретацию на множестве натуральных чисел, формальная система $\mathbf{G}$ допускает большое количество интерпретаций как числовой, так и нечисловой, теоретико-групповой природы. К последним относятся, например, множества всевозможных вращений квадрата либо круга в плоскости; множества всевозможных вращений квадрата либо круга либо куба в трехмерном пространстве, переводящих их в себя; всевозможные вращения сферы. Заменяя последние две аксиомы или заменяя их с добавлением еще одной аксиомы, можно получить ряд других групповых интерпретаций включая коммутативные (или абелевы) группы [Клини 1973, 263–265]. Что же касается представляющих для нас особый интерес числовых интерпретаций системы $\mathbf{G}$, то множествами объектов $a, b, c, \dots$ могут быть:

- а) все целые числа
- б) все рациональные числа
- в) все действительные числа
- г) все комплексные числа

Если в аксиомах $\mathbf{M}_1$ – $\mathbf{M}_6$ символы $+$, $-$, 0 заменить соответственно через символы $\cdot$, $^{-1}$, 1 или, что в принципе то же самое, толковать $+$ как умножение, $-a$ как обозначение обратного a элемента, то есть деления единицы на a , 0 как единицу, то бесконечными множествами объектов системы $\mathbf{G}$ могут быть:

- д) положительные рациональные числа
- е) рациональные числа, не равные нулю
- ж) положительные действительные числа
- з) действительные числа, отличные от нуля
- и) множество не равных нулю комплексных чисел

Содержательных интерпретаций, как видим, много, но главное здесь не их количество и многообразие, а то, что среди этого многообразия есть интерпретация (г) на множестве всех комплексных чисел, то есть на множестве всех чисел, если учесть, что действительные числа, частным случаем которых являются натуральные, есть частный случай комплексных чисел. Отметим, что система аксиом $\mathbf{M}_1$ – $\mathbf{M}_6$ с операциями $\cdot$, $^{-1}$ и индивидуальным объектом 1 (в их обычных значениях) имеет интерпретацию (и) на множестве всех комплексных чисел, но только без нуля. А пытаться строить подобную систему без нуля просто несерьезно, поскольку это совершенно уникальная и незаменимая математическая величина, фундаментальная математическая константа. Потребность в ней настолько велика, что даже в системе аксиом Пеано и других формальных системах типа $\mathbf{N}$ нуль добавляется к натуральному ряду, причем довольно искусственно, обычно в качестве некоего генератора натуральных чисел, и кроме того всегда фигурирует в аксиомной схеме полной индукции.

Как бы то ни было, если мы добиваемся формальной системы, имеющей в виду всё без исключения множество чисел, то выбор однозначно падает на операции сложения, вычитания и константу 0 , а не на умножение, деление и 1 . Кроме того, есть прямой резон включить в список аксиом системы коммутативный закон для сложения, что облегчит предстоящие построения. Спектр возможных приложений системы пострадает от этого не слишком сильно: останутся коммутативные (абелевы) группы и все перечисленные числовые множества

включая континуум. Таким образом, обозначаемая обычно через **AG** окончательная система математических аксиом включает в себя и аксиому

$$\mathbf{M}_7 \quad a + b = b + a$$

в чем состоит единственное ее формальное отличие от системы **G**. Можно, следовательно, утверждать, что на универсальном логическом основании строится достаточно универсальная логико-математическая система, аксиоматически определяющая математическое число вообще, континуум всех чисел без каких-либо упущений и лакун. Важно также, что наряду со множеством исходных объектов система **AG** задает полный набор первичных логических и математических операций, через которые по идее могут быть выражены все остальные. На этом пути нас ждут интересные результаты, в частности при попытке получения операций умножения, деления и единицы.

Резюмируя, прежде всего отметим, что с добавлением аксиомы **M₇** завершено построение логико-математического исчисления **AG**, представляющего собой начальные две части пятичленного формализма теории ЛМФ. Теперь уже можно полагать, что имеются в наличии все первичные понятия, правила, операции, постулаты и аксиомы, необходимые и достаточные для построения всей формальной структуры теории ЛМФ. Уверенность в этом, если, конечно, не обращаться к результатам, которые еще предстоит получить, зиждется на двух основаниях. Во-первых, сама основополагающая для всей теории идея триединства логики, математики и физики, согласно которой ФФТ подобно отходящим от ствола дерева ветвям является продолжением формальной математики, которая в свою очередь как бы вырастает из корней (математической) логики. Второе, весьма существенное, можно даже сказать, ключевое для всей работы основание состоит в том, что поставленная задача разрешима лишь в рамках формализма, охватывающего всю числовую математику, множество всех чисел без каких-либо ограничений и изъятий. Именно такова логико-математическая система **AG**, имеющая интерпретации как нечисловой, в частности теоретико-групповой природы, так и на множестве всех комплексных, а следовательно и действительных чисел. Намечено, если внимательно присмотреться, и общее направление последующего построения. Нетрудно заметить, что в списке базисных компонентов нет ни одного математического объекта (числа) за исключением нуля; посредством семи аксиом **M** полностью, хотя и неявно, определено понятие математического числа, но конкретные числа как таковые пока отсутствуют. Не определены еще единица и вторичные операции умножения и деления. Это важнейшая задача, которая в рамках системы **AG** должна быть решена уже на третьем этапе построения формализма теории как прямое, логически и онтологически необходимое продолжение первых двух этапов.

1.10. Континуум, формальная система и конкретные числа

До сих пор рассмотрение шло в основном по проторенным, хотя и с другими целями, тропам, а главная трудность состояла в выборе среди имеющихся альтернатив тех формальных средств, которые должны привести к решению поставленных задач. Теперь же мы вынуждены будем всё чаще сворачивать на нехоженные тропы, следуя внутренней логике и динамике развития системы **AG**. Представляется очевидным, что ее простое, “механическое” расширение путем добавления доказуемых формул недостаточно для раскрытия внутренних потенций формализма системы **AG**, ее скрытых возможностей. Для более полного их выявления необходимо решить ряд кардинальных и достаточно тонких вопросов. Как должен осуществляться переход от аксиоматически задаваемых основных свойств числа к конкретным числам? Какие именно числа должны следовать за нулем в формальной иерархии математических величин, являющейся естественным продолжением и необходимым следствием принятой системы постулатов и аксиом? Каковы фундаментальные правила – законы, устанавливающие соответствие между различными множествами, составленными из переменных и постоянных величин, иначе говоря, каковы исходные, материнские функции, посредством которых строятся остальные функции? Отвечая на подобные вопросы, мы рассчитываем получить в свое рас-

поряжение всё необходимое и достаточное для дальнейшего построения основ физической теории.

Фактическое начало физической математики заложено, конечно, добавлением математических аксиом к логическим постулатам. В принятой выше схеме дерева этому соответствует переход от логических корней к математическому стволу системы ЛМФ. И вот теперь, двигаясь по стволу, мы достигаем его верхней границы, то есть истоков исконно физической теории.

Начнем с бесспорного факта существования исторически сформировавшейся концепции бесконечного континуума, как и его составных частей, с фиксированными правилами оперирования, определенными принципами упорядочивания, характерными особенностями отдельных подмножеств или даже отдельных чисел и т.д. Словом, начнем с факта независимого существования содержательной теории, которую будем называть *теорией чисел*, понимая под этим всю числовую математику за исключением теории трансфинитных чисел. В свете этого необходимо уточнить, что когда после задания аксиоматического каркаса не развернутой еще системы **AG** говорят, что она формализует континуум, или имеет интерпретацию на множестве всех чисел, это следует понимать примерно так, что при определенном толковании графических знаков, составляющих алфавит системы **AG**, система аксиом M_1-M_7 вместе с правилами образования, преобразования, подстановки, замены и т.п. является достаточно адекватным формальным отображением своего независимо существующего содержательного прототипа. Точнее, исходная система правильно построенных формул – аксиом системы **AG** при соответствующем моделировании трансформируется в систему соотношений, выражающих основные свойства “живых” чисел и тем самым удостоверяется, хотя и не окончательно, пригодность взятой аксиоматики для формального представления данной содержательной теории. И не более того. При интерпретации или моделировании результаты, так или иначе получаемые в теории чисел, не становятся собственностью формальной системы; она должна прийти к этим результатам самостоятельно, используя лишь арсенал своих формальных средств. Если не принимать в расчет те обычно небольшие неувязки, разночтения, неоднозначности, которые видимо нельзя полностью устранить при идентификации живой теории с жестко регламентированной формальной схемой, и если отвлечься от специфических математических проблем, касающихся полноты, разрешимости и т.п., лишний раз свидетельствующих о принципиальной недостижимости абсолютно точного соответствия между содержательным оригиналом и его формальным двойником, то может показаться, что других серьезных проблем здесь нет. Действительно, если устанавливается, что какие-то результаты, получаемые в теории чисел, одновременно являются выводимыми формулами формальной теории, что мешает говорить о соответствии между двумя теориями хотя бы в этих пределах и с указанными оговорками, коль скоро конкретный вывод любой формулы – вопрос всё же *технологии*, а не *принципа*? На деле все обстоит сложнее, чем кажется на первый взгляд, поскольку оказывается, что при решении некоторых фундаментальных задач развертывания формальной системы важен не только ответ, но и способ его получения. Это весьма тонкий и в высшей степени ответственный, требующий особого внимания вопрос, суть которого состоит в следующем. Теория чисел наряду с общим понятием математического числа, наряду с понятием бесконечного континуума чисел имеет дело и с вполне конкретными, вообще говоря комплексными, числами. В формальной же системе **AG** на нынешнем этапе ее развертывания постулировано потенциально бесконечное множество объектов $a_1, a_{||}, \dots, b_1, b_{||}, \dots, z_1, z_{||}, z_{|||}, \dots$ с определенными свойствами, истолковываемых как числа, но нет еще ни одного конкретного числа как такового за исключением аксиоматически заданного термина 0. Добавим, что нет пока и ни одной конкретной функции, хотя понятие математической (числовой) функции определено еще в самом начале. Необходимо, следовательно, от понятия числа, числового множества, задаваемого совокупностью свойств, и от понятия числовой функции перейти к конкретным, реальным числам и функциям; весь вопрос в том, как это сделать.

Обратимся вначале к знакомым примерам и посмотрим, как вводятся натуральные числа. Обычно здесь применяется древнейший *метод зарубок*, известный еще доисторическому

человеку и примененный позже Робинзоном Крузо для ведения счета дням, проведенным на необитаемом острове. В современном научном варианте зарубки делаются не ножом или топором, а более цивилизованно ставятся ручкой, карандашом и т.п. на бумаге в виде точек или палочек – именно так строится натуральный ряд в интуиционистской математике, где знаки $1, 2, 3, \dots$ являются сокращенными обозначениями соответствующих последовательностей точек или палочек. В аксиоматике Пеано и в выросших из нее формальных системах арифметики натуральных чисел типа $\mathbf{N}$ ряд натуральных чисел вводится следующим образом: задается начальное число (обычно нуль) и принцип генерирования новых чисел, то есть означающий прибавление единицы оператор $'$, последовательным применением которого порождается шаг за шагом бесконечный ряд чисел $0, (0)', ((0)')', (((0)')')', \dots$, коротко обозначаемых знакомыми символами $0, 1, 2, 3, \dots$. Наконец, в аксиоматике классической теории множеств, где множество натуральных чисел является лишь начальным членом в возрастающей по *мощности* последовательности трансфинитных чисел, конкретные числа просто постулируются как актуальная данность так называемой аксиомой бесконечности, гласящей, что существует по крайней мере одно бесконечное множество – множество $\{1, 2, 3, \dots\}$ натуральных чисел. В других вариантах ряд начинается не с 1, а с 0, но здесь важно другое. Во всех указанных случаях введение конкретных чисел как физических объектов, как последовательности объектов, порождаемых из начального члена действием числового генератора или как актуально бесконечной данности, обусловлено наличием трех необходимых и достаточных условий. *Во-первых*, существованием наименьшего числа; *во-вторых*, дискретностью числового – натурального множества; *в-третьих*, возможностью, по крайней мере принципиальной, однозначного нахождения и представления любого его элемента. Нетрудно заметить, что для четных и нечетных чисел, факториалов и т.п. реализуются все три условия, для простых чисел не выполняется третье, для положительных действительных чисел – второе и третье, а для множества всех чисел не выполняется ни одно из трех условий. В общем, не все, что верно в частности, верно и для целого, и ясно, что решение поставленной задачи в случае континуума требует более тонкого подхода и универсальных методов.

1.11. Функциональные уравнения

Как же тогда, не прибегая к искусственным приемам, решить эту задачу, как, оставаясь в рамках исходного формального базиса системы $\mathbf{AG}$, ввести в нее конкретные числа? При такой постановке вопроса, если провести аналогию между множеством всех и множеством натуральных чисел и принять во внимание сказанное относительно способов введения натурального ряда, не видно никаких подходов и задача кажется неразрешимой. Поставим поэтому проблему несколько иначе и спросим, чего в первую очередь недостает пока системе $\mathbf{AG}$, какие глубинные внутренние потенции системы еще не востребованы и не раскрыты? В неявной форме ответ частично содержится в разделе 1.9, когда обсуждались различные интерпретации системы $\mathbf{AG}$. Там наряду с интерпретацией на множестве всех чисел, с пониманием трех символов формального языка как сложения, вычитания и нуля была и интерпретация системы $\mathbf{AG}$ на множестве всех чисел (только без нуля) и при толковании тех же символов как умножения, обратного элемента и единицы. Приняв тогда единственно возможное решение, мы вместе с тем как бы приняли на себя обязательство непременно выразить операции $\cdot, ^{-1}$ и число 1 через исходные операции $+, -$ и число 0. Впрочем, и так ясно, что без умножения, деления и свойств единицы говорить о теории чисел и вообще о математике не приходится, и так или иначе они должны быть как-то определены. Отметим, что задача корректного введения арифметических действий стоит и перед любой достаточно богатой системой формальной арифметики. В случае **арифметики натуральных чисел $\mathbf{N}'$** из 1.6, когда первичные числа – натуральный ряд – к этому моменту уже постулированы, проблема, напомним, решается посредством рекурсивных функций. В случае же формальной системы универсальной числовой математики задача введения недостающих пока арифметических действий, а также ничуть не менее важная задача получения первичных чисел и исходных

функций фактически сводятся, как сейчас увидим, к решению соответствующим образом составленной системы функциональных уравнений.

Но предварительно условимся о терминологии. Любое математическое равенство назовем, как иногда делается, *законом сохранения*, желая тем самым подчеркнуть, что в равенстве двух частей математической формулы содержится глубокая идея постоянства математического закона, неизменяемости аналитических связей и в некоторых случаях идея сохранения каких-то величин. Равенство, содержащее только постоянные величины, назовем *соотношением*, равенство с переменными – *уравнением*, а равенство, где в качестве искомой величины выступает функция, – *функциональным уравнением*. Введение новых математических реалий редукцией их посредством функциональных уравнений к исходным элементам это могучее средство, общий метод развертывания формальной системы, дополняющий функциональными свойствами задаваемые аксиомами свойства числа. В сущности, это неявное определение новых элементов, раскрывающее изначально заложенный в системе потенциал. Функциональные уравнения, как скоро выяснится, это простейший и самый верный путь к редукции операций умножения и деления к сложению и вычитанию; здесь достаточно ограничиться умножением и сложением, поскольку остальное уже тривиально.

Итак, обозначив новую операцию умножения точкой $\cdot$, которую во многих случаях можно опустить, мы хотим с помощью *простейших функциональных уравнений* определить, или в некотором смысле свести, умножение к сложению, и сейчас требуется составить соответствующие уравнения. Для двух числовых выражений $x + y$ и $x \cdot y$, а следовательно четырех функциональных выражений

$$f(x + y), \quad f(x \cdot y), \quad f(x) + f(y), \quad f(x) \cdot f(y)$$

возможны в общей сложности шесть уравнений. Поскольку уравнения

$$f(x + y) = f(x \cdot y) \quad f(x) + f(y) = f(x) \cdot f(y)$$

просто означают отождествление умножения со сложением, а в уравнениях

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

нет сведения одной операции к другой, остается всего два функциональных уравнения – так называемые уравнения Коши. Обозначив искомые функции через $\psi(x)$ и $\alpha(x)$, имеем:

$$E_1 \quad \psi(x + y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$$

$$E_2 \quad \alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(x \cdot y), \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Аргумент функции ψ (нет надобности всякий раз писать $\psi(x)$, $\alpha(x)$, часто удобнее обозначать функции просто символами ψ и α) может принимать любые значения из бесконечного числового континуума без каких-либо ограничений, сама же функция ψ не имеет, как окажется, нулевого значения, следовательно для нее это *особая точка*, нуждающаяся в специальном рассмотрении. Аргументы функции $\alpha(x)$ ограничены условием ненулевых значений во избежание выражений типа $0 \cdot x$, $0 \cdot 0$, а впоследствии и $0/x$, $0/0$, $x/0$, вместе с тем функция α может принимать, как выяснится позже, любые значения, в том числе нулевое. Если поэтому заполнить пробел, связанный с тем обстоятельством, что $\psi(x) \neq 0$, то каждой из функций ψ и α будет охвачено все множество чисел без каких-либо изъятий, что важно для выяснения их теоретического статуса, границ применимости и конструктивных возможностей.

Функциональные уравнения E_1 и E_2 нетрудно обобщить на случай многих переменных:

$$E_{10} \quad \psi(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \dots \psi(x_k)$$

$$E_{20} \quad \alpha(x_1) + \dots + \alpha(x_k) = \alpha(x_1 \cdot x_2 \dots x_k)$$

Введем теперь функциональный аналог изначальной математической константы нуль – константу λ , то есть основным свойствам нуля $a \pm 0 = a$, зафиксированным в аксиомах M_5 – M_6 ,

придадим функциональный характер. Для этого есть только один путь. В единственной под знаком функции сумме одну из переменных заменим, по аналогии с ± 0 , выражениями $\pm \lambda$ для некоей константы λ , так что

$$E_{3-4} \quad \psi(x \pm \lambda) = \psi(x)$$

что равносильно двум уравнениям:

$$E_3 \quad \psi(x + \lambda) = \psi(x)$$

$$E_4 \quad \psi(x - \lambda) = \psi(x)$$

В более общем случае, учитывающем возможность многократного применения функционального правила нуля (периодичности), эти уравнения выглядят так:

$$E_{30} \quad \psi(x + \lambda + \dots + \lambda) = \psi(x)$$

$$E_{40} \quad \psi(x - \lambda - \dots - \lambda) = \psi(x)$$

Договоримся при понимании E_1 – E_4 , или E_{10} – E_{40} как единых, целостных систем уравнений применять обобщенные символы E и E_0 , а полученную к настоящему моменту логико-математическую систему обозначать далее символом **AGE**. Система функциональных уравнений E или ее обобщенный вариант E_0 , призванные свести умножение к сложению и заодно распространить фундаментальный для математики закон сохранения любого числа относительно сложения и вычитания нуля на функциональный случай, дает в действительности нечто гораздо большее. Об этом легче будет судить после ознакомления с некоторыми особенностями и выводами, получаемыми из функциональных уравнений.

1.12. Материнские функции ψ и α

Знакомство с системой функциональных уравнений мы начнем с выявления родственных связей между функциями ψ и α . Если некая функциональная зависимость f задана уравнением $y = f(x)$, то для получения обратной функциональной зависимости φ необходимо, поменяв местами x и y , перейти к уравнению $x = \varphi(y)$, определяющему x как функцию от аргумента y . Сделать это удастся, правда, не всегда; если из уравнения $y = f(x)$ следует уравнение $x = \varphi(y)$, говорят, что функция $f(x)$ имеет обратную функцию $\varphi(y)$, и наоборот – если уравнение $x = \varphi(y)$ приводит к $y = f(x)$, то $f(x)$ есть функция, обратная $\varphi(y)$. Это обычное (наравне с теоретико-множественным определением, которое здесь нет нужды приводить) определение понятия взаимно обратных функций. Нетрудно убедиться, что функции ψ и α таковыми и являются.

Для доказательства в рамках нашего формализма введем, с учетом функциональных уравнений для λ , новые переменные u и v :

$$u = \psi(x) = \psi(x \pm \lambda), \quad v = \psi(y) = \psi(y \pm \lambda)$$

Считая эти уравнения разрешимыми относительно аргументов, что, вообще говоря, есть необходимое условие существования явной обратной функции, и обозначая обратную ψ функцию символом ξ , имеем:

$$x = \xi(u) \quad \text{или} \quad x \pm \lambda = \xi(u) \quad \text{отсюда} \quad \xi(u) = x \pm \lambda$$

$$y = \xi(v) \quad \text{или} \quad y \pm \lambda = \xi(v) \quad \text{отсюда} \quad \xi(v) = y \pm \lambda$$

Крайние справа выражения показывают, что ξ содержит неопределенность, связанную с константой λ , и следовательно не является однозначной функцией, если же принять во внимание, что указанное выше *правило функционального нуля* может применяться многократно без всяких ограничений, то станет ясно, что ξ – функция бесконечнозначная, со спектром значений

$$\xi_0, \quad \xi_0 \pm \lambda, \quad \xi_0 \pm \lambda \pm \lambda, \quad \xi_0 \pm \lambda \pm \lambda \pm \lambda, \dots$$

Начальное значение ξ_0 назовем *главным значением*, или *главной ветвью*, функции ξ_0 , а λ – *периодом*. Далее, из уравнения E_1 , помня, что ξ по определению является функцией обратной ψ , имеем:

$$x + y = x + y \pm \lambda \pm \dots \pm \lambda = \xi(u) + \xi(v) = \xi(u \cdot v)$$

Следовательно, с точностью до графических обозначений, которые конечно же произвольны, получаем уравнение E_2 для функции α . Возвращаясь к прежним символам, устанавливаем тождество $\xi \equiv \alpha$, означающее, что α есть функция, обратная ψ .

Аналогично, обозначая обратную α функцию через β и вводя переменные w, t уравнениями

$$\alpha(x) = w \quad x = \beta(w)$$

$$\alpha(y) = t \quad y = \beta(t)$$

получим из E_2 уравнение

$$x \cdot y = \beta(w) \cdot \beta(t) = \beta(w + t)$$

отличающееся от E_1 лишь графикой. Следовательно, функция β , обратная α , есть ψ , так что $\beta \equiv \psi$.

Таким образом, ψ и α являются взаимно обратными функциями, причем, как выясняется, ψ однозначная, а α многозначная (бесконечнозначная) функция. Для достижения полной ясности в этом достаточно важном вопросе сравним исходное уравнение

$$\psi(x \pm \lambda) = \psi(x)$$

с недавно введенным

$$\alpha(x) = \alpha(x) \pm n\lambda$$

Сразу видно, что период λ в первом случае соотносится с *аргументом* функции ψ , а во втором – с самой *функцией* α , и именно по этой причине функция ψ бесконечному множеству значений ставит в соответствие единственное значение функции, а функция α в силу ее статуса обратной ψ функции одному значению аргумента ставит в соответствие потенциально бесконечный спектр значений функции. Особому случаю $n = 0$ соответствует главное значение функции $\alpha(x)$.

Ничуть не отрицая правомерность определения понятия обратной функции отношением *функция – аргумент*, которое для функций ψ и α оказалось, как видим, весьма продуктивным, дадим понимание этого вопроса, вытекающее из особенностей системы AGE и продиктованное следующими конкретными соображениями. Во-первых, мы вообще полагаем, что других помимо ψ и α исходных аналитических числовых функций нет, иначе говоря, все математические функции подобного типа включая все специальные функции математической физики посредством исходных и вторичных математических операций всегда могут быть представлены через *материнские* функции ψ и α . Если же это так, то определение обратной функции, как и некоторых других математических понятий для ψ и α , должно иметь основополагающее значение для понимания этих понятий в математике вообще. Во-вторых, внимательно вчитаемся в словесную формулировку функциональных уравнений. В предельно сжатом виде это выглядит так:

E_1 Функция от суммы равна произведению функций

E_2 Функция от произведения равна сумме функций

Вполне очевидно, что в каждом из двух уравнений по отношению к операциям сложения и умножения производится действие, обратное действию, производимому в другом уравнении.

Следовательно, в отношении сложение – умножение функция α является обратной функцией для ψ , а ψ – обратной функцией для α .

Далее, есть еще один заслуживающий внимания способ выявления обратной функции. Если вспомнить о возможности операторного представления функций и ввести операторные обозначения $\hat{A}$ и $\hat{A}^{-1}$ для прямой и обратной функций, то даже без строгого доказательства ясно, что двукратное применение операторов в любой последовательности $\hat{A}\hat{A}^{-1}$ либо $\hat{A}^{-1}\hat{A}$ не должно в итоге приводить к каким-либо изменениям переменных величин и может лишь сопровождаться появлением постоянных. Это и понятно: преобразование и обратное преобразование в совокупности должны привести математическое выражение к его первоначальному виду, который вместе с тем в силу возможной многозначности одной из функций уже не обязательно единствен. Выражаясь не очень строго, это восстановление исходного графического рисунка с точностью до подчиненной некоему правилу произвольной постоянной. Так обстоит дело, например, с однозначным оператором дифференцирования d и обратным ему многозначным оператором интегрирования $\int$, где

$$d\int f(x)dx \equiv f(x)$$

есть тождество, а равенство

$$\int df(x) = f(x) + C'$$

содержит произвольную константу C' .

Правило сокращения (с указанными оговорками) функциональных знаков является достаточно общим и как бы обращенным к самой семантике слова *обратный*, поэтому посмотрим, как оно работает в случае материнских функций ψ и α . Для этого в уравнение E_1 вместо переменных x и y подставим $\alpha(x)$ и $\alpha(y)$, а в E_2 переменные заменим функциями $\psi(x)$, $\psi(y)$. После очевидных преобразований получим

$$\psi(\alpha(x \cdot y)) = \psi(\alpha(x)) \cdot \psi(\alpha(y))$$

$$\alpha(\psi(x + y)) = \alpha(\psi(x)) + \alpha(\psi(y))$$

так что первое уравнение для $\psi\alpha$ содержит лишь операцию умножения, а уравнение для $\alpha\psi$ лишь операцию сложения. Если теперь просто опустить функциональные знаки, то придем к равенствам

$$x \cdot y = x \cdot y \quad \text{и} \quad x + y = x + y$$

из которых, как легко догадаться, принимая во внимание однозначность функции ψ и многозначность α , первое есть тождество, а второе должно содержать постоянную, кратную периоду λ . Для полного же согласования правила сокращения функциональных знаков $\alpha\psi$ с идеей единственности произведения чисел достаточно ограничиться главным значением функции α ($n\lambda = 0$) и тогда двойное равенство

$$\psi(\alpha(x)) = \alpha(\psi(x)) = x$$

справедливо для любого числа $x \neq 0$. Для определенности, однозначности результатов удобно при анализе функциональных уравнений вообще ограничиваться главными значениями функции α везде, где только допустимо.

Можно констатировать следующее. Материнские функции ψ и α естественно удовлетворяют основанному на замене местами аргумента и функции теоретико-множественному определению понятия обратной функции, как и правилу сокращения операторов или функциональных знаков. Вместе с тем мы пришли к альтернативному, лучше сказать дополнительному, определению прямой и обратной функции по отношению к важнейшим операциям сложения и умножения. Это принципиально новое определение весьма важных понятий относится

только к материнским функциям и лишний раз свидетельствует об их статусе. Разумеется, в дальнейшем функции ψ и α можно будет без всякого труда определить как прямую и обратную функции по отношению к операциям вычитания и деления, но это едва ли заслуживает отдельного рассмотрения, поэтому примем просто к сведению и такую возможность.

1.13. Исследование функциональных уравнений

Вслед за рассмотрением комплекса вопросов, касающихся прямой и обратной функций, проведем небольшое исследование исходя только из формы функциональных уравнений, естественно, с использованием аксиом и теорем системы **AG**.

а) **Коммутативность сложения и умножения чисел и функций.** Из коммутативности сложения для чисел (аксиома **M₇**) можно получить остальные пять коммутативных правил – для сложения функций, умножения чисел и функций. Имеем:

$$\psi(x) \cdot \psi(y) = \psi(x + y) = \psi(y + x) = \psi(y) \cdot \psi(x)$$

и коммутативность умножения для функции ψ доказана. Подставляя $\alpha(x)$ и $\alpha(y)$ на место переменных в уравнение **E₁** и используя только что доказанное свойство, получим:

$$\psi[\alpha(x) + \alpha(y)] = \psi[\alpha(x)] \cdot \psi[\alpha(y)] = \psi[\alpha(y)] \cdot \psi[\alpha(x)] = \psi[\alpha(y) + \alpha(x)]$$

Сравнивая аргументы функции ψ в начальном и конечном выражениях, получим равенство

$$\alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(y) + \alpha(x)$$

то есть коммутативность сложения для функции α .

Используем теперь уже это свойство для доказательства коммутативного правила для произведения:

$$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(y) + \alpha(x) = \alpha(y \cdot x)$$

откуда следует, что $x \cdot y = y \cdot x$. Попутно докажем сочетательное свойство для умножения чисел x, y, t , используя при этом квадратные скобки и опуская знак умножения, то есть полагая, что xy есть сокращенная запись произведения двух чисел:

$$(xy)t = \psi[\alpha((xy)t)] = \psi[\alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(t)] = \psi[\alpha(x) + \alpha(yt)] = \psi[\alpha(x(yt))] = x(yt)$$

Оставшиеся два коммутативных правила дадим без комментариев:

$$\psi[\psi(x) + \psi(y)] = \psi[\psi(x)] \cdot \psi[\psi(y)] = \psi[\psi(y)] \cdot \psi[\psi(x)] = \psi[\psi(y) + \psi(x)]$$

откуда

$$\psi(x) + \psi(y) = \psi(y) + \psi(x)$$

$$\alpha[\alpha(x) \cdot \alpha(y)] = \alpha[\alpha(x)] + \alpha[\alpha(y)] = \alpha[\alpha(y)] + \alpha[\alpha(x)] = \alpha[\alpha(y) \cdot \alpha(x)]$$

или

$$\alpha(x) \cdot \alpha(y) = \alpha(y) \cdot \alpha(x)$$

Мы установили коммутативность всех чисел и исходных функций ψ и α по отношению к сложению и умножению. Заметим, что на вычитание эти правила не распространяются.

б) **Функциональная единица.** Пусть в **E₁** одна из переменных – нуль:

$$\psi(x + 0) = \psi(x) = \psi(x) \cdot \psi(0)$$

Умножение любого $\psi(x)$ на $\psi(0)$ не меняет $\psi(x)$, а это как раз означает, что $\psi(0)$ обладает тем уникальным свойством, которое характерно только для единицы. Естественно поэтому ввести обозначение $\psi(0) \equiv 1$ и вместо “значение функции $\psi(0)$, равное 1”, называть терм $\psi(0)$ *функциональной*, если требуется отметить ее происхождение, *единицей* или просто *единицей*, если в этом нет надобности.

Между прочим, имея в своем распоряжении аксиоматически заданный нуль и обладающий свойством единицы терм $\psi(0)$, то есть фактически начальные члены натурального ряда, а также операцию $+$, которая вполне годится на роль числового генератора, можно без труда построить последовательность

$$0, \quad 1, \quad 1 + 1 \equiv 2, \quad 1 + 1 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 3, \dots$$

как побочный продукт построений системы AGE. Мы хотим, однако, решить задачу в общем виде – для всего континуума, поэтому рассмотрение этого вопроса еще впереди. К тому же функциональная единица, строго говоря, еще не конкретное число, связанное с другими числами, а определенное свойство неизвестного вида функции $\psi(x)$ для единственно доступного пока значения аргумента $x = 0$.

в) **Обобщение функциональной единицы.** Его можно осуществить сразу в нескольких направлениях. Пусть в уравнении E_{10} все переменные либо все за исключением, скажем, x – нули. Получим соответственно

$$\psi(0 + 0 + \dots + 0) = \psi(0) = \psi(0) \cdot \psi(0) \dots \psi(0) \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1$$

$$\psi(x + 0 + \dots + 0) = \psi(x) = \psi(x) \cdot \psi(0) \dots \psi(0) \equiv \psi(x) \cdot 1 \dots 1$$

Вводя для n сомножителей новый метаязыковой символ 1^n :

$$\psi(0) \cdot \psi(0) \dots \psi(0) \equiv 1 \cdot 1 \dots 1 \equiv 1^n$$

имеем компактные формулы

$$\psi(x) \cdot 1^n \equiv \psi(x) \text{ и } 1^n \equiv 1$$

Следовательно, произведение термов

$$\psi(0) \cdot \psi(0) \dots \psi(0) \equiv 1^n$$

как и терм $\psi(0)$, тождественно по свойствам функциональной единице.

Подставим теперь в уравнения E_1 и E_{10} постоянную λ , записывая через $\pm$ два уравнения как одно:

$$\psi(x \pm \lambda) = \psi(x) = \psi(x) \cdot \psi(\pm \lambda)$$

$$\psi(x \pm \lambda \pm \dots \pm \lambda) = \psi(x) = \psi(x) \cdot \psi(\pm \lambda) \dots \psi(\pm \lambda)$$

значит, $\psi(\pm \lambda)$ есть единица в указанном смысле и

$$\psi(\pm \lambda) \cdot \psi(\pm \lambda) \dots \psi(\pm \lambda) \equiv 1^n \equiv 1$$

В итоге свойствами единицы обладает потенциально бесконечное множество термов типа

$$\psi(0) \quad \psi(0) \cdot \psi(0) \quad \dots \quad \psi(0) \cdot \psi(0) \dots \psi(0)$$

$$\psi(\pm \lambda) \quad \psi(\pm \lambda) \cdot \psi(\pm \lambda) \quad \dots \quad \psi(\pm \lambda) \cdot \psi(\pm \lambda) \dots \psi(\pm \lambda)$$

г) **Функциональный нуль.** Заменив в уравнении E_2 переменные x и y термом $\psi(0) \equiv 1$, получим

$$\alpha(1) + \alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1)$$

Отсюда следует, что главное значение α -функции $\alpha(1)$ обладает свойством индивидуального объекта нуль; вследствие же многозначности α тождество $\alpha(1) \equiv 0$ носит частный характер и $\alpha(1)$ принимает и другие, ненулевые значения. Нулевое значение функции $\alpha(x)$ при $x = \psi(0)$ назовем по принятой нами терминологии *функциональным нулем*, отличая его от аксиоматически заданного нуля, которому он тождествен по свойствам, но не по форме.

д) **Обратные величины.** Подставим $y = -x$ в уравнение E_1 :

$$\psi(x - x) = \psi(0) = \psi(x) \cdot \psi(-x) = 1$$

Поскольку x произвольная переменная, формула

$$\psi(x_0) \cdot \psi(-x_0) = 1$$

определяет $\psi(x)$ и $\psi(-x)$ как взаимнообратные значения функции ψ (не путать с понятием обратной функции) для любого числа x_0 , для любой точки континуума, понимая под точкой определенное число, интерпретируемое как точка на плоскости. В отличие от функции α , которая в точке $\alpha(1) \equiv 0$ имеет частное значение 0, функция ψ вообще не принимает нулевых значений. Это ее характерная и очень важная, заслуживающая особого внимания особенность, поэтому временно примем это просто на веру, что дает возможность определить операцию $^{-1}$ (“деление единицы на”) для функции $\psi(x)$ отношением

$$\psi(-x) \equiv 1/\psi(x), \text{ или } \psi(x) = 1:\psi(x)$$

имеющим место для всех x без каких-либо ограничений.

В этом состоит единственное, хотя и достаточно важное отличие операции $^{-1}$ для функции ψ от определения $^{-1}$ для чисел:

$$x \cdot x^{-1} = 1, \text{ или } x^{-1} \equiv 1/x \equiv 1:x$$

справедливое для всех чисел кроме 0. Свойства нуля, способ его аксиоматического задания приводят к тому, что произведение любого числа на нуль есть снова нуль. Действительно, устанавливая ранг оператора “ $\cdot$ ” ниже чем у оператора “ $+$ ” и устанавливая правило

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ для } b = 0$$

получим:

$$(a + 0) \cdot c = a \cdot c = a \cdot c + 0 \cdot c$$

Отсюда $0 \cdot c = 0$, что исключает выражения типа

$$0 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot (1/0) = 1$$

то есть исключает “нуль в знаменателе”.

е) **Операция деления.** С помощью обратных значений нетрудно определить деление для чисел, функций ψ , α и их аргументов, с теми же оговорками относительно нуля, что и выше. Деление x на y есть не что иное как умножение x на обратную y величину $1/y$:

$$x/y = x \cdot 1/y, \text{ или } x:y = x \cdot y^{-1} \quad (y \neq 0)$$

и при таком определении деление подобно умножению коммутативно. Для функции ψ последовательно имеем цепочку равенств

$$\psi(x)/\psi(y) = \psi(x) \cdot 1/\psi(y) = \psi(x) \cdot \psi(-y) = \psi(x - y)$$

приводящую от деления функции ψ с различными аргументами к разности этих аргументов под знаком функции, – между прочим, исключительно удобный и с чисто практической точки зрения результат, сводящий фактически операцию деления к вычитанию. Для функции $\alpha(x)$ ($x \neq 0$) предварительно установим, что

$$\alpha(x \cdot 1/x) = \alpha(1) = \alpha(x) + \alpha(1/x) = 0$$

с точностью до постоянной, равной нулю для главного значения α . Отсюда по аналогии с числами $\alpha(1/x) = -\alpha(x)$, поэтому

$$\alpha(x/y) = \alpha(x \cdot 1/y) = \alpha(x) + \alpha(1/y) = \alpha(x) - \alpha(y)$$

Нетрудно понять, что формула типа $\psi^{-1}(x) = \psi(-x)$ для функции α не выполняется, поэтому обратное значение для $\alpha(x)$ ($x \neq 0$) определяется из общего понятия обратной величины:

$$\alpha^{-1} \cdot \alpha = 1, \quad \alpha^{-1} = 1/\alpha$$

Отсюда деление $\alpha(x)$ на $\alpha(y)$ есть просто умножение $\alpha(x)$ на величину обратную $\alpha(y)$:

$$\alpha(x)/\alpha(y) \equiv \alpha(x) : \alpha(y) = \alpha(x) \cdot 1/\alpha(y)$$

Из десяти возможных типов умножения и деления – для чисел, функций ψ , α и их аргументов – осталось лишь умножение и деление аргументов под знаком функций. В принципе ничего нового здесь нет, и мы лишь введем обозначения

$$\psi(x \cdot y) \equiv \psi^x(y) \equiv \psi^y(x)$$

$$\psi(x/y) \equiv \psi(x \cdot 1/y) \equiv \psi^{1/y}(x) \equiv \psi^x(1/y)$$

смысл которых окончательно прояснится позже. На этом завершается все, что связано с операциями $+$, $-$, $\cdot$, $:$, которые посредством постулатов и теорем системы **AGE**, а также полученных из них следствий и построений определены для всех возможных случаев.

* *

*

Подведем первые итоги исследования функциональных уравнений. На основе задаваемых ими свойств функций ψ и α с использованием постулатов и теорем системы **AGE** получены важные данные о математических операциях, числах и функциях ψ , α . Выяснилось, что для ψ и α понятие обратной функции может определяться не только в терминах теории множеств, не только перестановкой зависимой и независимой переменных или же устанавливаться правилом сокращения знаков, но и определяться по отношению к операциям сложения и умножения, а при желании – вычитания и деления. Целиком выполнена программа по сведению операций $\cdot$, $^{-1}$ и единицы к исходным элементам формальной системы, введены понятия функциональной единицы и функционального нуля как естественные обобщения обычных числовых понятий. Кроме того, имея в виду и математические аксиомы, рассмотрены практически все – в общей сложности два десятка – случаи сложения, вычитания и производных от них умножения и деления для чисел, функций ψ , α и аргументов под знаком этих функций.

1.14. Поиск и решение в формальной системе

Развертывание формальной системы в нужном направлении – достаточно кропотливая работа, требующая последовательности и терпения, причем у нас нет права использовать при формальных построениях какие-либо принципы и конструкты кроме постулированных и полученных к данному моменту. Поэтому надо ясно отдавать себе отчет в том, что все мета-языковые рассуждения – лишь способ исследования и внешнего описания автономно организующейся и развивающейся системы дозволенными средствами, все ссылки на содержательную математику – лишь вехи и ориентиры, облегчающие продвижение вперед без ненужных блужданий, а примеры из физической теории – оживляющие текст иллюстрации, апеллирующие к знакомым образам и вызывающие соответствующие ассоциации. Что касается возможных незначительных отклонений от стандартов дедуктивной строгости суждений и доказательств, построенных по принципу “если ..., то ...” или “предположим, что ...”, то их появление связано с необходимостью забегать вперед в тех случаях, когда это подсказано логикой изложения. В принципе все подобные условные предложения без порочного круга в доказательстве могут быть впоследствии сделаны утвердительными. Наконец, более полное обоснование и оправдание даваемых нами оценок и прогнозов возможно лишь как следствие, итог и толкование все новых и новых построений в рамках системы **AGE**.

Напоминание о том, что при конкретных построениях нужно обходиться исключительно внутренними ресурсами формальной системы, не случайно приурочено к началу поиска константы λ . Ведь для того чтобы приступить к поиску, надо достаточно ясно себе представить, что под этим следует вообще понимать. Означает ли это, например, что надо получить числовое решение четверки уравнений E_1 – E_4 , которое (по числу независимых уравнений)

возможно приведет к системе из четырех констант, а не одной? В обычном содержательном смысле решение уравнений сводится к применению определенной последовательности операций по заранее известной для данного типа уравнений схеме, в результате чего удастся в качестве решения найти систему чисел, подстановка которых в уравнения обращает их в тождества, то есть обе части равенства просто обращаются в нуль. Понятно, что к нашей системе уравнений такой подход неприменим, поскольку ни разработанных алгоритмов решения, ни готовых к использованию чисел за исключением 0 нет и в помине. Как раз всё это и предстоит получить: начальные числа, *проточисла*, могут быть построены из единственного числового “кирпичика” – нуля.

Для этого, казалось бы, есть старый, испытанный и отнюдь не противоречащий стандартам формальной строгости способ угадывания решений, повсеместно используемый в математике, как содержательной, так и формальной. Определенный набор величин – чисел – в результате, допустим, предварительной прикидки или методом проб и ошибок может быть объявлен решением системы уравнений, и задача сводится к тому, чтобы удостовериться в правильности, а нередко и единственности данного решения, а если понадобится, то дополнить или скорректировать его должным образом. Элемент угадывания в небольшой, правда, степени присутствует и в нашем случае, но главенствующим методологическим принципом здесь, как при исследовании свойств функций ψ и α , которые в основном фактически уже выявлены, остается полный учет всех простейших вариантов. А их не так уж много, если принять во внимание, что круг допустимых конструктивных средств ограничен единственным числом 0, операциями $+$, $-$, $\cdot$, $:$, суперпозицией функций $\psi(\alpha(x))$, $\alpha(\psi(x))$ и взаимно обратными функциями ψ и α с установленными свойствами, в том числе свойством $\psi(0) = 1$, которое и станет для нас отправной точкой.

1.15. Нулевые значения функции ψ , константы λ_0 , i , 2

Наряду с $\psi(0) \neq 0$ соотношение $\psi(x) = 1/\psi(-x)$ для произвольного x показывает, что функция $\psi(x)$ отлична от 0 для любых x . Есть, следовательно, серьезный повод и даже необходимость для поиска с целью заполнения недостающего нулевого решения посредством комбинаций, составленных из $\psi(x)$ и $\psi(-x)$. В силу того, что $\psi(x)$ не имеет нулей, отпадают суперпозиции $\psi(\psi(x))$, $\psi(\psi(-x))$; по той же причине не подходят термы

$$\psi(x) \cdot \psi(-x), \quad \psi(x)/\psi(-x)$$

образованные умножением и делением функции ψ . Из простейших комбинаций для $\psi(x)$ и $\psi(-x)$ остались две:

$$\psi(x) + \psi(-x) \quad \text{и} \quad \psi(x) - \psi(-x)$$

Учитывая, что $\psi(x)$ и $\psi(-x) = 1/\psi(x)$ определены для всех значений x включая 0, и понимая 0 как некую центральную точку, центр симметрии для всего числового множества, мы вправе допустить существование точки λ_0 , для которой сумма

$$c(x) = \psi(x) + \psi(-x)$$

симметричная, инвариантная относительно замены $x \rightarrow -x$, обращается в 0. Конечно, в силу периодичности функции ψ она обращается тогда в нуль и в бесконечном множестве точек

$$\lambda_0 \pm \lambda, \quad \lambda_0 \pm \lambda \pm \lambda, \quad \dots, \quad \lambda_0 \pm n\lambda, \quad \dots$$

Таким образом, мы полагаем, что

$$c(\lambda_0) = \psi(\lambda_0) + \psi(-\lambda_0) = \psi(\lambda_0) + 1/\psi(\lambda_0) = 0$$

Чтобы лучше понять смысл этого равенства, попытаемся оценить его с точки зрения инвариантности. Помимо справедливой для любого математического равенства общей идеи здесь фактически содержится утверждение о четырех конкретных типах инвариантности.

- а) Периодичность – инвариантность функции $c(x)$ относительно преобразования $x \rightarrow x \pm \lambda$
- б) Четность – инвариантность функции $c(x)$ относительно преобразования $x \rightarrow -x$
- в) Инвариантность функции ψ в точке λ_0 при переходе от обратного значения функции к противоположному: $\psi^{-1}(\lambda_0) = -\psi(\lambda_0)$
- г) Инвариантность функции ψ при переходе от противоположного значения аргумента к обратному значению функции: $\psi(-x) = \psi^{-1}(x)$

Уникальность константы λ_0 ясно видна из тройного равенства

$$-\psi(\lambda_0 \pm \lambda) = -\psi(\lambda_0) = \psi(-\lambda_0) = \psi^{-1}(\lambda_0)$$

свидетельствующего о совпадении различных функциональных характеристик в точке λ_0 .

Предположение о существовании нуль-значения функции

$$c(x) = \psi(x) + \psi(-x)$$

приводит к выявлению особой точки – константы λ_0 , о которой мы пока ничего толком сказать не можем, зато открывается прекрасная возможность для определения значения функции в этой точке. Из последнего равенства для $c(\lambda_0)$ следует, что

$$\psi(\lambda_0) \cdot \psi(\lambda_0) = -\psi(0) = -1$$

то есть в правой части получаем значение функции ψ в точке 0, автоматически уже обозначаемое через -1 . Нетрудно убедиться, что терм $-\psi(0)$ действительно обладает характерным свойством содержательного “минус 1”, для которого $(-1) \cdot (-1) = 1$. Из равенства для $\psi(\lambda_0)$ следует, что умножение на себя же искомого значения равно -1 , так что остается только ввести обозначение $\psi(\lambda_0) \equiv i$, обычное для *мнимой единицы*.

Из этих построений ясно, что среди трех математических величин

$$\psi(\lambda_0) \equiv i, \quad -\psi(0) \equiv -1, \quad \psi(0) \equiv 1$$

независимой математической константой следует считать лишь первую из них – по той простой причине, что две другие строятся из нее по периодическому закону

$$i, i \cdot i = -1, \quad (i \cdot i) \cdot i = -i, \quad (i \cdot i) \cdot (i \cdot i) = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad 1 \cdot i = i, \dots$$

Это заслуживающий внимания результат, поскольку получается, что с точки зрения концепции формализации континуума и в противоречии с тем, как это часто представляется в математике, положительная и отрицательная единицы как вторичные образования имеют менее высокий теоретический статус, чем мнимая единица, и если уж говорить об определении $i \cdot i = -1$, то это скорее определение -1 через i , а не наоборот. А поскольку в составленных только из i произведениях значения $i, -1, -i, 1$ повторяются в той же последовательности при каждом новом цикле (периоде), отсюда вытекают два заключения. Во-первых, период λ содержит обеспечивающую периодичность фундаментальную константу i , следовательно $\lambda = C_1 i$, где теперь уже C_1 – неизвестная еще константа. Во-вторых, сравнение свойств $\psi(\lambda)$ и $\psi(\lambda_0)$ непосредственно приводит к соотношению

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_0 + \lambda_0 + \lambda_0$$

выражающему период λ через сумму четырех слагаемых λ_0 . Это соотношение скоро нам понадобится, а сейчас от суммы $\psi(x)$ и $\psi(-x)$ перейдем к их разности. С учетом равенства $\psi(-\lambda_0) = -\psi(\lambda_0)$ имеем

$$\psi(\lambda_0) - \psi(-\lambda_0) = \psi(\lambda_0) - (-\psi(\lambda_0)) = \psi(\lambda_0) + \psi(\lambda_0) = i + i$$

Для суммы двух одинаковых величин a и a введем обозначение $a + a = 2a$, в частности $i + i = 2i$, и вскоре покажем, что 2 (двойка) – еще одна из искомых математических констант, соотносящихся с λ .

Попытка отыскать нулевую точку для простейших комбинаций функции ψ приблизила нас к цели на одну, даже на две константы, но не решила проблему в целом; окончательного решения всё еще нет. Хотя и узок круг допустимых приемов исследования, однако использованы еще не все возможности. В запасе последний в смысле поиска λ (а теперь уже λ_0) стратегический резерв системы AGE – перебор различных комбинаций функций ψ и α с нулевыми значениями аргумента.

1.16. Исходные функции и проточисла

Недопустимость определенных выражений значительно облегчает задачу, и для пяти операций включая суперпозицию всего получается шесть выражений, из которых принципиально новым является лишь последнее:

$$\begin{aligned}\psi(0) \cdot \psi(0) &= \psi(0) & \psi(0)/\psi(0) &= \psi(0) \\ \psi(0) - \psi(0) &= 0 & \psi(0) + \psi(0) &= 2\psi(0) \equiv 2 \\ \alpha(\psi(0)) &= 0 & \psi(\psi(0)) &= ?\end{aligned}$$

Терм $\psi(\psi(0)) = \psi(1)$ это действительно нечто новое, ранее не встречавшееся. Вводя новый символ

$$e \equiv \psi(\psi(0))$$

используя периодичность функции ψ , свойства терма $\psi(0)$ и формулу для произведения чисел под ее знаком, можно для любой точки x континуума выразить $\psi(x)$ в следующем виде:

$$\psi(x) = \psi(x \pm n\lambda) \cdot \psi(0) = \psi(\psi(0))^{x \pm n\lambda} \equiv e^{x \pm n\lambda} = e^x$$

Это принятое наряду с $\exp x$ обозначение экспоненты, или показательной функции с основанием e , знаменитым неперовым числом; функцией обратной экспоненте

$$\psi(x) \equiv e^x \equiv \exp x$$

является, как известно, функция комплексного логарифма $\text{Ln } x$. Отсюда тождество

$$\alpha(x) \equiv \text{Ln } x$$

или, обозначая через $\ln x$ главное значение логарифма,

$$\text{Ln } x = \ln x \pm n\lambda$$

Отметим, что один за другим и целиком в рамках системы AGE установлены все за исключением значения константы λ основные свойства функций ψ и α , и естественно уже перейти к привычной символике, тем более что до окончательного отождествления этих функций с экспонентой и логарифмом осталось уже немного. Впрочем, обозначение исходных функций символами ψ и α вместо знакомых символов содержательной теории e^x ($\exp x$) и $\text{Ln } x$ ($\ln x$ для главного значения логарифма, с которым чаще приходится иметь дело на практике) также имеет свои преимущества, и мы по-прежнему будем ими пользоваться.

Обратимся теперь к комбинации

$$\psi(0) + \psi(0) \equiv e^0 + e^0 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2$$

которая, как видим, приводит к “чистой” – без сомножителей a , в данном случае равного 1, – двойке. Однако и здесь число 2 это еще не содержащаяся в λ математическая константа, а всего лишь сокращенная запись стоящих слева от него двучленных выражений. Обратная величина

$$\frac{1}{\psi(0) + \psi(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

сложенная с собой же, дает

$$\frac{1}{\psi(0) + \psi(0)} + \frac{1}{\psi(0) + \psi(0)} = \frac{\psi(0)}{\psi(0)} = \psi(0)$$

то есть функциональную единицу, с которой и связан период $\lambda \neq 0$. Очевидна причастность 2 к периоду, конкретное выражение которого требуется найти. Из предыдущего соотношения следует, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

а значит двойка как бы разбивается на четыре слагаемых, каждое из которых является ее обратной величиной. Сравнивая с

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_0 + \lambda_0 + \lambda_0$$

и учитывая, что $\lambda = C_1 i$, получим $\lambda = 2iC_0$ с уже новой константой C_0 , которая должна дополнить и завершить систему констант исходных функциональных уравнений, поскольку здесь все конструктивные возможности практически уже исчерпаны. Заметим, что в содержательном смысле мнимая единица i обеспечивает периодичность экспоненциальной функции и значений логарифмической, но не величину самого периода. Поэтому отсутствие константы C_0 (формально это равнозначно тому, что $C_0 = \psi(0)$) привело бы к значениям $\lambda = 2i$, или $\lambda/2 = i$, и к формулам

$$\psi(2i) = 1, \quad \psi(i) = -1, \quad \psi(i/2) = i$$

которые выглядят неправдоподобно, особенно на фоне значений для $\psi(0)$, $\psi(1)$, $\psi(-1)$, $\psi(2)$. Это нестрогие, конечно, рассуждения, но при поиске решений функциональных уравнений важен, как отмечалось, лишь конечный результат, правильность полученного решения системы уравнений. Допуская существование в составе λ обозначаемого через π и отличного от $\psi(0)$ множителя, окончательно приходим к соотношению

$$\lambda = 2\pi i, \quad \text{или} \quad \lambda_0 = \pi i/2$$

Число π – самая знаменитая, пожалуй, математическая величина, выступающая здесь, правда, не в своем привычном геометрическом амплуа *отношения длины окружности к диаметру*, а в роли одной из фундаментальных констант не считая нуля, которые отныне будем называть **проточислами**, желая тем самым выразить их понимание как начальных элементов, “атомов”, из которых естественным образом строится континуум чисел. Впрочем, геометрическая интерпретация, к слову сказать далеко не единственная для числа π , легко получается при интерпретации носящих имя Эйлера формул

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pm \pi i} = -1, \quad e^{3\pi i/2} = -i, \quad e^{\pm 2\pi i} = 1$$

(где $3 \equiv 2 + 1$) как поворотов радиуса-вектора окружности единичного радиуса в комплексной плоскости. При таком толковании повороту на четверть окружности соответствует величина $\pi/2$, повороту на полуокружность π , а полному обороту, периоду соответствует поворот на 2π (в радианах), при котором радиус-вектор, описав окружность длиной 2π , возвращается в исходное положение.

Таким образом, частично выведены, частично построены и частично “угаданы” все названные нами проточислами и добавляемые к нулю в качестве фундаментальных математических констант “скрытые параметры” системы функциональных уравнений $E_1 - E_4$, или в обобщенной форме $E_{10} - E_{40}$. Тем самым исследование в этой части общей задачи в основном завершено, а полученные выше результаты могут быть использованы для дальнейшего развертывания системы AGE.

1.17. Построение континуума. О других числовых системах

Теперь уже нетрудно построить континуум как бесконечный упорядоченный универсум, как множество конкретных чисел. Построить число значит выразить его через известные величины или по крайней мере указать способ, алгоритм сведения к ним. А таковых у нас уже достаточно, и по формулам

$$e^0 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = i^2 = -1, \dots$$

они образуют единую и самодостаточную систему *протоцисел* – исходных математических атомов для построения остальных чисел. Следует особо подчеркнуть, что мы имеем здесь не одну, как в концепции первичности натурального ряда, а сразу все четыре математические “единицы”.

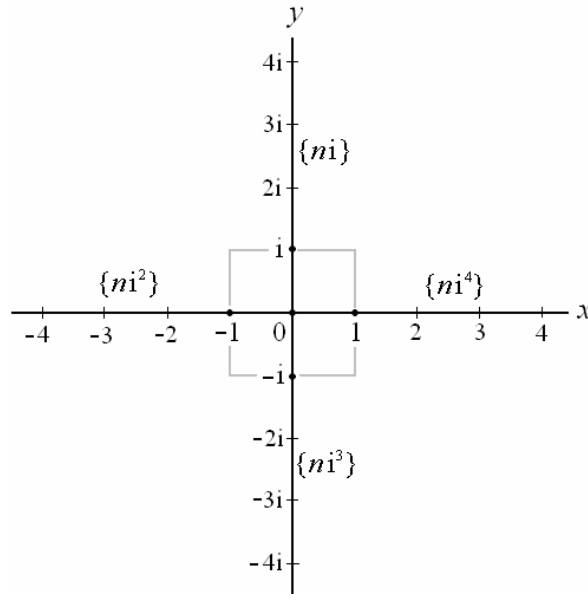


Рис. 1.17

Геометрическая интерпретация математических единиц и образованных из них множеств типа $\{ni^k\}$

В геометрической интерпретации они представляются в виде показанных на рисунке точек на осях прямоугольной системы координат, в которой любое число толкуется как точка на плоскости (комплексной). Используя геометрические образы, можно сказать, что всё, на что способна интуиционистская математика в одном, положительном направлении оси OX , здесь делается одновременно (не в физическом, разумеется, смысле, а в смысле равноправия, отсутствия логической очередности) и единообразно во всех четырех возможных направлениях; при этом не возникает проблем с введением, например, отрицательных чисел, с мнимой единицей, с математическими константами и т.д. Само построение множества всех чисел, осуществленное в [Аракелян 1981, 123–129], покажем схематично, не вникая в детали.

Вначале из исходных элементов $0, i, -1, -i, 1$, последовательно применяя схему сложения

$$0, \quad 0 + a \equiv a, \quad a + a \equiv 2a, \quad 2a + a \equiv 3a, \quad 3a + a \equiv 4a, \dots$$

с вполне очевидными сокращенными обозначениями, получим четыре потенциально бесконечных множества типа

$$\{ni^k\} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{1.17.1}$$

“целочисленных” (по отношению к четырем единицам) чисел с соответствующими условными названиями:

$\{ni\}$	0, i , $2i$, ..., ki , ...	мнимо-положительные целые числа
$\{ni^2\}$	0, -1 , -2 , ..., $-k$, ...	целые отрицательные числа
$\{ni^3\}$	0, $-i$, $-2i$, ..., $-ki$, ...	мнимо-отрицательные целые числа
$\{ni^4\}$	0, 1 , 2 , ..., k , ...	целые положительные числа

Два следующих построения для каждого из множеств также вполне очевидны и в принципе ничем не отличаются от обычного построения множества всех положительных действительных чисел, являющегося разновидностью одного из четырех конструируемых здесь множеств. Построения эти сводятся к получению положительных рациональных чисел как отношений между целыми положительными и трех их аналогов – отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных; затем к получению четырех множеств положительных, отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных иррациональных чисел, образуемых, например, путем составления бесконечных непериодических, в частности двоичных, дробей. В геометрической интерпретации им ставится в соответствие бесконечное множество точек на осях абсцисс и ординат указанной прямоугольной системы координат и остается лишь построить точки комплексной плоскости, проекциями которых считаются точки на осях. Если, не умаляя общности, считать x и y отличными от $\pm i$, все двучлены можно привести к единой знакомой всем форме $z = x + iy$. Разумеется, к геометрическим образам мы как всегда прибегли лишь для наглядности, по идее вполне можно обойтись без понятий точки, плоскости, системы координат и т.п. Кроме того, количество шагов, приводящих к комплексным числам, можно сократить, минуя, например, построения “рациональных” чисел или, допустим, генерирование чисел из объектов $0, i, -1, -i, 1$ рассматривать как единое, не расчленяемое, не распадающееся на отдельные процедуры действие. Можно даже при желании построить множество всех чисел из исходных *единиц* “одним махом”, унифицировано и минуя все промежуточные звенья. Всё это в конце концов вопросы технического свойства, которые в данной ситуации не столь существенны. Цель обсуждения схемы построения в другом: показать, что система AGE действительно обладает потенциалом, воплощаемым в инструментарий, необходимый и достаточный для получения континуума как множества математических конструкторов, строящихся по определенным правилам из исходных.

Добавим, что хотя содержательные толкования множества комплексных чисел могут быть разными – точки на плоскости, векторы двумерного пространства, матрицы второго порядка и др., – проточисла как генератор четырех единиц и множество чисел, конструируемых из последних, обладают исключительно важным свойством единственности. Об этом в какой-то мере свидетельствует безальтернативность всех наших построений, основанных на идее полного исчерпания всех возможных простейших вариантов, а строгое доказательство единственности имеется в содержательной теории. Не углубляясь в детали, скажем только, что применительно к системе AGE единственность следует понимать, во-первых, как отсутствие каких-либо других помимо системы величин $e, \pi, i, 2$ числовых решений исходных функциональных уравнений и отсутствие каких-либо других помимо множества элементов типа $x + iy$ завершенных числовых множеств, соответствующих постулатам системы и конструируемых из атомов $0, \pm i, \pm 1$. Во-вторых, любая попытка обобщения, расширения, дополнения и т.п. множества комплексных чисел (гиперкомплексные числа, в частности кватернионы, числа Кэли, Клиффорда – Липшица, а также p -адические числа, ...) возможна лишь ценой отказа от тех или иных исходных положений системы AGE. Например, частный случай гиперкомплексных чисел – кватернионы, или числа типа

$$x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$$

отличаются формально от комплексных чисел тем, что у них три вместо одной комплексные единицы, связанные между собой формулами, тиражирующими

$$\psi(\pi i) = i^2 = -1$$

и соотношениями для их циклической перестановки:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k \quad ji = -k \quad jk = i \quad kj = -i \quad ik = -j \quad ki = j$$

Легко увидеть, что закон коммутативности умножения, установленный нами для комплексных чисел с использованием коммутативности сложения (аксиома M_7), для кватернионов не выполняется. Следовательно, переход от размерности 2 к размерности 4, которому геометрически соответствует переход от двумерной плоскости к четырехмерному пространству, не означает (в отличие, допустим, от заполнения множества всех рациональных чисел числами иррациональными) заполнения, расширения и т.п. множества комплексных чисел родственными им по общим признакам объектами нового рода, поскольку это сопровождается разрушением основ самой системы постулатов. Для других размерностей, число которых, конечно, не ограничено, отличия оказываются еще более глубокими. Так, для размерностей 3, 5 и выше нельзя построить даже систему, аналогичную кватернионам, а гиперкомплексные системы с делением (каждое из уравнений

$$ax = b \text{ и } xa = b, \text{ где } a \neq 0$$

имеет единственное решение) могут иметь только размерности 4 и 8 [Кантор, Солодовников, 36]. Словом, если под числами понимать объекты, обладающие вполне определенной совокупностью обычных свойств включая коммутативность умножения и операцию деления, то универсум отвечающих этим требованиям объектов целиком формируется и заполняется комплексными числами $x + iy$. В этом смысле можно утверждать, что других чисел нет, а все остальные “числа” – объекты другого рода, то есть с существенно другим набором основных свойств. Иногда это положение, известное благодаря исследованиям Вейерштрасса, Фробениуса, Пирса и других, облекается в сходную форму: невозможно какое-либо расширение понятия комплексного числа за пределами системы комплексных чисел без отказа от каких-то фундаментальных свойств числа. К тому же теория гиперкомплексных чисел не порождает новых математических констант, поскольку соотношения

$$i^2 = j^2 = k^2 = \dots = -1$$

лишь мультиплицируют, тиражируют мнимую единицу, а не вводят какие-то новые математические величины.

1.18. Комплексные числа. Экспонента и логарифм

Построив множество комплексных чисел и установив его единственность, введем привычные понятия и символы и зафиксируем некоторые свойства комплексных чисел. Объекты типа xi^{2k} ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), равные x или $-x$ и содержащие i в нулевой и четных степенях, назовем действительными, или вещественными, числами, а объекты типа yi^{2k+1} , равные iy или $-iy$, назовем чисто мнимыми числами; комплексное число z в общем случае есть сумма двух таких слагаемых. Очевидно, что $z = x + iy$ равно нулю в том и только в том случае, когда $x = y = 0$. Отныне комплексные числа мы будем обозначать по традиции символами $z, z_1, z', \dots$, а символы $x, y, t, \dots$ сохраним для действительных чисел. Числа $z = x + iy$ и $z^* = x - iy$, произведение которых равно $x^2 + y^2$, назовем, как обычно, комплексно сопряженными, обозначая произведение zz^* также через $|z|^2$, где $|z| = r$ – модуль, или абсолютная величина, числа z – есть положительный корень из $\sqrt{x^2 + y^2}$. В то время как сложение, вычитание, умножение и деление двух произвольных комплексных чисел дает другое комплексное число, сложение и умножение двух комплексно сопряженных чисел приводит, как нетрудно убедиться, к действительным числам r^2 и $2x$, вычитание – к чисто мнимому $2iy$ и только в результате деления z/z^* , которое по установленному ранее равносильно умножению z на обратную z^* величину $1/z^*$, получается комплексное число

$$\frac{z}{z^*} = \frac{x^2 - y^2}{r^2} + i \frac{2xy}{r^2}$$

Понятие комплексно сопряженного числа оказывается полезным при переходе от чисел к исходным функциям. Под знаком ψ есть два различных функциональных варианта для переменной $z = x + iy$:

$$\psi(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \quad \text{и} \quad \psi(z') = e^{z'} = x + iy$$

с неизвестной величиной z' . По аналогии с $e^z = e^{x+iy}$ имеем

$$e^{z'} = e^{p+i\varphi} = e^p \cdot e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}$$

и требуется установить связь действительных чисел $e^p = \rho$ и φ с x и y из уравнения

$$x + iy = \rho \cdot e^{i\varphi}$$

Для $e^{p+i\varphi}$ комплексно сопряженным числом естественно считать $e^{p-i\varphi}$, поскольку их произведение равно действительному $e^{2p} = \rho^2$; тогда

$$zz^* = x^2 + y^2 = \rho^2$$

и ρ оказывается равным ранее введенному r . Применяя же сложение и вычитание для комплексно сопряженных величин в числовой и функциональной формах и приравнявая их, придем к искомым соотношениям, связывающим две пары действительных переменных:

$$x = r \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad y = r \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Используя для дробных выражений привычные обозначения

$$r \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \equiv r \cos \varphi, \quad r \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \equiv r \sin \varphi$$

имеем хорошо известные формулы

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x + iy = r e^{i\varphi} \equiv r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

из которых последняя, иногда неточно называемая формулой Эйлера, является обыкновенным тождеством. Напомним, что с функциями косинуса и синуса как с простейшими комбинациями $\psi(x)$ и $\psi(-x)$, мы встречались когда вели поиск решений функциональных уравнений. Сейчас они появились при установлении аналитической связи между двумя формами представления комплексных чисел – в виде линейного двучлена и в форме экспоненты. Разумеется, сокращения $\cos z$, $\sin z$ вводятся исключительно ради удобства, истинная же природа этих функций вовсе не в их “угловой”, “тригонометрической” принадлежности, выражаемой как отношение катетов прямоугольного треугольника к гипотенузе или как декартовы координаты точки на окружности единичного радиуса и т.п. Истинная природа косинуса, синуса и других тригонометрических функций, впервые, кстати, установленная Эйлером при сравнении независимо полученных выражений для $2\cos x$ и $e^{ix} + e^{-ix}$ с помощью разложения их в ряд [Вилейтнер, 157–158], заключается в их составленности из констант e , i , 2 с выделенными значениями в особых точках $\pi/2$, π , 2π , ... Желая подчеркнуть это обстоятельство, будем говорить о e - i - 2 -преобразованиях или о e - 2 -преобразованиях в случае, не содержащем i гиперболических функций. Введение вспомогательных функций $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ очень удобно на практике и облегчает многие расчеты, например при возведении комплексного числа z в степень $\pm n$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) или при извлечении корня n -ой степени из z по формулам, непосредственно получаемым для экспоненты и переводимым далее в удобную для расчетов тригонометрическую форму:

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\varphi + 2\pi i k}} = \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Это знаменитые формулы Муавра возведения z в целую степень n и обратной операции извлечения корня n -ой степени из z , причем во втором случае периодичность экспоненты приводит к существованию n различных, вообще говоря комплексных, корней. В общем случае понятие извлечения корня теряет всякий смысл, так как речь уже идет не о целых числах, а возведение в любую степень, как мы знаем, сводится к умножению или делению под знаком функции ψ , а поскольку деление на число есть умножение на его обратную величину, достаточно одного умножения. Конкретно, пусть комплексное число z надо возвести в комплексную степень u (z и u отличны от нуля). Используя также свойство $z = \psi(\alpha(z))$ взаимно обратных функций ψ и α , имеем

$$z^u = [\psi(\alpha(z))]^u = \psi(u \cdot \alpha(z))$$

или в обычной символике

$$z^u = e^{u \operatorname{Ln} z} = e^{u(\ln z + 2\pi i k)} = e^{u \ln z} \cdot e^{u 2\pi i k}$$

следовательно z^u имеет бесконечное множество значений. Отсюда ясно, что в частном случае целого числа $u = m$ второй сомножитель $e^{m \cdot 2\pi i k}$ представляет собой функциональную единицу, а первый сомножитель $e^{m \ln z}$ однозначен вследствие однозначности главного значения логарифма, поэтому z^m имеет единственное значение. Нетрудно также установить, что если $z = m = 1/s$ (s – целое), в более общем случае несократимой рациональной дроби если $m = r/s$, то z^m имеет s корней. На этом введение обычных символов и исследование в рамках системы AGE основных свойств комплексных чисел завершается и можно в том же ключе приступить к обсуждению не менее важного вопроса о природе математических (числовых) функций.

Тот факт, что посредством функций ψ и α оказывается возможным не только сведение операций умножения и деления к аксиоматически заданным операциям сложения и вычитания, но и однозначное получение четырех ФМК, неявно определяемых системой уравнений E и E₀, говорит о совершенно исключительной роли этих функций в математике. Другого унифицированного способа введения в математическую теорию констант e , π , i , 2 как замкнутой, согласованной системы фундаментальных величин, насколько можно судить, не существует.

Можно, конечно, определить экспоненту e^z , а тем самым логарифм $\operatorname{Ln} z$ и константу e через (пользуясь принятой нами терминологией) закон сохранения функции по отношению к дифференцированию, а значит и интегрированию, как это фактически делается в работе [Гурвиц, Курант, 73–74], коль скоро e^z является единственной функцией, производная которой равна самой функции:

$$\frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \text{или} \quad \int e^z dz = e^z + C_0$$

Доказательство этого свойства проведено там, однако, не в основаниях теории функций, а с использованием множества предварительно полученных результатов, а главное, это ничего не дает для получения остальных констант. Для полной ясности, ограничиваясь для простоты действительной переменной x , проследим за истоками этого закона сохранения в теории пределов, где он обычно и выводится [Фихтенгольц, 164, 125, 77–78]. Из предельного соотношения

$$\frac{da^x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a \quad \text{при } a \neq 0$$

видно, что означенное свойство является частным случаем (для $a = e$, отсюда $\ln a = 1$) предельного равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

которое в свою очередь может быть получено из соотношений

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

являющихся естественным обобщением более простого соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

для варианты $1/n$. Последнее выражение – результат доказательства в теории пределов существования конечного предела типа 1^∞ , дающего одновременно возможность, хотя с чисто практической точки зрения не лучшую, вычислить значение

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ 95749\ 66967\dots$$

Как бы то ни было, функциональное уравнение

$$\psi'(x) = \psi(x)$$

или в интегральной форме

$$\int \psi(x) dx = \psi(x) + C_0$$

– это лишь определение функции ψ , не более того. Даже отдаленного намека на другие фундаментальные константы здесь нет. Если все же попытаться в рамках аксиоматической системы заменить E_1 этим уравнением, сохранив уравнения для периода E_3 , E_4 , то сразу встанет вопрос о целесообразности, а скорее всего и допустимости такой замены. Дело в том, что новых функций помимо экспоненты и логарифма и новых констант помимо проточисел мы все равно не получим, зато базис может при этом сильно усложниться. За внешней простотой и красотой функционального уравнения $\psi' = \psi$ скрывается сложность определения понятия производной, сложность, которая плохо согласуется с требованиями простоты, минимальности, удобства оснований теории в целом. Предельный переход – чрезвычайно важная, но громоздкая математическая операция. Для ее определения требуются кроме пропозициональных связок, кванторов и нуля математические операции сложения и вычитания и выражаемая обычно через умножение операция деления, но ведь если последние две уже заданы, то отпадает всякая надобность в операции $\lim$ для введения функций e^z , $\ln z$ и четверки констант. Словом, не давая в принципе никаких преимуществ, не добавляя ничего нового, подобная система уравнений создавала бы массу технических неудобств, устранение которых привело бы снова к системе E . Всё это свидетельствует как о единственности материнских функций с четырьмя константами, так и о фактической безальтернативности их представления.

Другой, в какой-то степени дополняющий этот способ введения логарифма и экспоненты связан с интегральным исчислением [Курант, 197–206]. Поскольку равенство

$$\int x^{\alpha+1} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (C - \text{постоянная интегрирования})$$

справедливо для всех значений α за исключением $\alpha = -1$, естественно прийти к заключению, что мы имеем дело с новой, принципиально отличной от x^α функцией определенной для всех положительных x кроме $x = 0$. Данное определение натурального логарифма можно, конечно, обобщить и на общий случай комплексной переменной, но надобности в этом здесь нет. Настоящее определение дает возможность получить в рамках интегрального и дифференциального исчисления все необходимые свойства логарифмической функции, а существование обратной функции e^x непосредственно вытекает из монотонности функции $\ln x$. При этом константа e есть “то число, логарифм которого равен 1” [там же, 207]. Интегральный, так сказать, способ введения логарифмической и экспоненциальной функций не лишен изящества, но с обозначенной выше точки зрения он столь же несовершенен как и предыдущий,

дифференциальный способ. Общий вывод и большая часть приведенной выше аргументации относительно неприемлемости дифференциального определения экспоненты как альтернативного способа введения материнских функций справедлив и для интегрального случая, поэтому нет нужды почти дословно повторять высказанные там соображения. Отклоняясь немного в сторону, обратим все же внимание на одно не столь значительное, но не лишнее интереса обстоятельство, которое поможет лучше понять природу обсуждаемых функций. В последнем определении логарифмическая функция, как это ни парадоксально, выглядит как особая точка, частный случай степенной функции, соответствующий значению $\alpha = -1$. Разумеется, любая математическая функция (за исключением, как мы знаем, экспоненты) и та же функция под знаком интеграла – не одно и то же. Вместе с тем интегрирование степенной функции не меняет ее природу, а приводит лишь к другой степенной функции; и только в частном случае интегрирования функции $1/x$ получаем нечто отличное. Может показаться, что возможны лишь два различных объяснения: либо функция $1/x$ не должна считаться степенной, что звучит довольно странно, либо справедлива версия о частном случае. Однако в действительности дело обстоит иначе. Интегральное исчисление нельзя рассматривать в отрыве от дифференциального. Это как бы две стороны одной медали, а в основе понимания их единства лежит теорема, согласно которой неопределенный интеграл от непрерывной функции всегда имеет производную, равную подынтегральной функции. Иначе говоря, последовательное применение взаимобратных операторов d и $\int$ приводит к их сокращению, а обсуждаемое равенство выражает лишь то, что производная логарифма $\ln x$ равна $1/x$. В принятой нами системе записи $\alpha'(x) = 1/x$, что в свою очередь непосредственно связано с функциональным уравнением $\psi'(x) = \psi(x)$. Всё это уже было и ничего, следовательно, нового в интегральном определении логарифма нет, лишь форма записи другая. Что касается степенной, а также показательной функций, то не только в формализме теории ЛМФ, но и в представленном выше интегральном понимании логарифма “введение функций $y = x^a = e^{a \ln x}$ и $y = a^x = e^{x \ln a}$ получилось ... само собой” [там же, 206]. Знаменательный вывод, в котором можно усмотреть признание первичности логарифма и экспоненты, несводимых к другим функциям.

1.19. Проточисла и функции

Не совсем очевидным следствием всех этих рассуждений является вывод, что любая попытка сведения всех математических функций к какому-либо списку исходных функций неизбежно столкнется с проблемой фундаментальных констант, необходимость решения которой столь же неизбежно приведет ко всё тем же экспоненте и логарифму. Поэтому мы еще раз утверждаем, что никаких других функций, способных реально претендовать на базисную роль в математике нет. Любая аналитическая функция, какой бы сложной, неординарной она ни была, посредством математических констант и их комбинаций, операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\lim$, суммы слагаемых Σ , произведения множителей Π , дифференцирования df/dz , интегрирования, суперпозиции и других операций может быть выражена, по крайней мере в области комплексных чисел, через e^z и $\ln z$. Количество интересующих нас функций практически необозримо, и не только рассмотрение, но даже простое перечисление всех случаев заняло бы слишком много места и едва ли вообще реально. Этого, впрочем, и не требуется – достаточно ограничиться основными элементарными функциями, простые как правило комбинации которых с помощью бесконечных сумм, произведений, суперпозиций и т.д. образуют обширный класс неэлементарных функций.

Простейшими и наиболее полезными в самых различных случаях, не исключая самые сложные, комбинациями экспоненты и проточисел (e -i-2-преобразования) являются, как это видно на примере косинуса и синуса, шесть хорошо известных тригонометрических функций, сокращенно обозначаемых как $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$, $\csc z$ (для тангенса и котангенса нередко используются и другие обозначения), и столько же аналогичных им и не содержащих мнимой единицы (e -2-преобразования) гиперболических функций. Шесть обратных триго-

нометрических и шесть обратных гиперболических функций попарно связаны между собой посредством константы i , и все без исключения двенадцать обратных функций выражаются через i и логарифм.

Рассмотренное выше выражение z^u , возводящее комплексное число z в комплексную степень u , распадается на два частных случая, когда либо основание степени z , либо показатель степени u постоянное комплексное число. Следовательно, *степенная* функция z^a ($z \neq 0$) представляется в виде

$$e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln z + k2\pi i)} = e^{a(\ln |z| + i\varphi + k2\pi i)}$$

и вследствие свойств логарифма однозначна, если $a = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, и многозначна в остальных точках. Для *показательной* функции a^z ($a \neq 0$) также все ясно: $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ есть многозначная (из-за $\operatorname{Ln} a$) функция в отличие от экспоненты e^z , областью однозначности которой является вся комплексная плоскость, “разрезанная” вдоль отрицательной части действительной оси. В теории специальных функций, например Γ -функции, нередко встречается произведение показательной функции a^z на степенную z^b , где a и b могут быть различными постоянными величинами. В общем случае

$$a^z z^b = e^{x \operatorname{Ln} a + b \operatorname{Ln} z} \quad (1.19.1)$$

для главного же значения логарифма

$$a^z z^b = e^{x \ln a + b \operatorname{Ln} z} \quad (1.19.1')$$

К этому виду можно привести также любое число за исключением 0, и в определенных случаях именно такая форма представления числа является наиболее удобной и отвечающей существу дела.

Неограниченное количество элементарных функций получается из основных конечным применением операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и суперпозиции. Снимая ограничения на конечность и допуская тем самым бесконечные ряды и произведения, дифференцирование и интегрирование во всех их разновидностях, бесконечную суперпозицию, то есть допуская операции, связанные с предельным переходом $\lim$, получим почти необозримый класс неэлементарных функций, по-прежнему выражаемых через e^z , $\operatorname{Ln} z$, но уже посредством и предельных операций. Принципиальной разницы между теми и другими нет и неэлементарные функции, подобно ψ и α , обычно вводятся в математику через функциональные уравнения. Например, знаменитая гамма-функция $\Gamma(z)$ обобщающая целочисленную функцию факториала $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ на случай любого комплексного z исключая точки $0, -1, -2, \dots$, определяется как решение функционального уравнения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{при условии} \quad \Gamma(1) = 1$$

Гамма-функция имеет несколько представлений, из которых наиболее общим является интегральное представление Ганкеля для всей комплексной области с выброшенными точками $0, -1, -2, \dots$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_C e^{(z-1)\ln s - s} ds$$

Сведение к экспоненте, логарифму и проточислам здесь настолько явно, что не требует комментариев.

Функции комплексной переменной

$$e^u/u = e^{u - \ln u} \quad \text{и} \quad 1/\ln u = e^{-\ln \ln u}$$

образуют под знаком интеграла интегральную показательную и интегральную логарифмическую функции

$$\operatorname{Ei}(z) = - \int_z^{\infty} \frac{e^u}{u} du, \quad \operatorname{li} z = \int_0^z \frac{du}{\ln u}$$

Соответственно по общему правилу

$$F(z) = \int_z^a \frac{f(u)}{u} du$$

где $f(u)$ – одна из тригонометрических или гиперболических функций, постоянная a равна 0 или ∞ , получаются интегральный синус и косинус, интегральный гиперболический синус и остальные интегральные выражения, связанные друг с другом и с $\operatorname{Ei}(z)$ и $\operatorname{li}(z)$ соотношениями, аналогичными их элементарным прототипам. Например, для интегрального косинуса $\operatorname{Ci}(z)$ имеет место соотношение

$$\operatorname{Ci}(z) \equiv \frac{\operatorname{Ei}(iz) + \operatorname{Ei}(-iz)}{2}$$

во всем сходное с выражением для $\cos z$. Разложение каждой из указанных функций в бесконечный ряд, например

$$\operatorname{Ei}(z) = \gamma + \ln(-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n \operatorname{Ln} z}}{n \cdot n!}, \quad |\arg(-z)| < \pi$$

всякий раз сопровождается появлением одной и той же величины γ , чаще всего записываемой в виде

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

с десятичным значением

$$\gamma = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421\ 59335\ 93992\ 35988\ 05767\dots$$

Эта довольно часто встречающаяся в математике, особенно в теории специальных функций, константа (Эйлер, 1735) свидетельствует о том, что есть и другие фундаментальные математические константы помимо 0, e , π , i , 2, в частности константа, связанная с операцией $\lim$. Операция предельного перехода применяется здесь к расходящейся сумме $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$, которая сходится в бесконечности к константе γ благодаря логарифмическому слагаемому $\ln n$. Вместе с тем постоянная Эйлера посредством операции предельного перехода (конкретно – бесконечной суммы) непосредственно выражается через материнские функции:

$$-\gamma = \int_0^{\infty} e^{-u} \ln u \, du \equiv \int_0^{\infty} \frac{\alpha(u)}{\psi(u)} \, du$$

Взятая с обратным знаком константа Эйлера, равная отношению α/ψ под знаком несобственного интеграла, целиком составлена из компонентов системы **AGE**. Не было поэтому необходимости вводить ее посредством еще одного функционального уравнения. А поскольку число γ , насколько известно, даже очень сложной комбинацией других констант не является, ее следует считать одной из ФМК.

В связи с выделенными числами нельзя не упомянуть того, что разложение экспоненциальных выражений в бесконечные ряды порождает числовые последовательности, которые находят разнообразные применения в чистой математике и приложениях. Лучше других известны числа Бернулли и числа Эйлера, определяемые следующим образом. Числа Бернулли B_n это коэффициенты в разложении

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi$$

Числами Эйлера называются коэффициенты в весьма сходном с предыдущим разложением функции $1/\operatorname{ch} z$:

$$\frac{2}{e^z + e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n, \quad |z| < \pi/2$$

причем все нечетные E_{2k+1} равны 0. Не приводя формулы связи между числами Эйлера и Бернулли, числами Бернулли и биномиальными коэффициентами, биномиальными коэффициентами и числами Фибоначчи и т.д. и т.п., отметим только, что существование подобных связей между различными системами выделенных числовых последовательностей – один из мощных факторов, обуславливающих внутреннее единство математики как теории чисел (в широком смысле слова). А главное для нас здесь то, что в основе этого единства лежат исходные, материнские функции и проточисла, позволяющие и непосредственно конструировать из нуля и четырех единиц континуум и получать отдельные его выделенные части с помощью логарифма и разложением экспоненты в бесконечные ряды.

Завершая обсуждение функций, следует непременно добавить, что, как принято считать, произвольная математическая функция может быть представлена, притом единственным образом, в виде конечного, а чаще бесконечного e - i - 2 -преобразования, то есть тригонометрического ряда, частный случай которого – ряды Фурье. Окончательного доказательства нет, но для очень широкого класса функций это доказано, см. [Зигмунд].

1.20. Уравнение суперпозиции: первый этап исследования

Построив из элементов 0, e , π , i , 2 континуум чисел и показывая затем возможности исходных комплексных функций ψ и α , мы при переходе от элементарных функций к специальным встретились с еще одной фундаментальной математической величиной – постоянной Эйлера γ . Другая математическая величина, также иногда считающаяся фундаментальной, – “золотое число”

$$\phi = e^{\operatorname{arsh} 1/2} = 1/2 + \sqrt{(1/2)^2 + 1} = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ldots$$

Это часто встречающееся в природе, различных областях науки и искусства константа, обладающая целым рядом удивительных математических свойств и выражающая *принцип золотой пропорции (золотого сечения)*, или принцип экстремальности (минимальности, оптимальности), реализуемый при решении многих теоретических вопросов в математике и ее приложениях, в живой и неживой природе. Кстати, подробному рассмотрению и обсуждению всего что связано с числом ϕ посвящены в [Аракелян 2007] три главы, главное назначение которых – изложение обобщенной, с позиций теории ЛМФ, теории золотой пропорции (ОТЗП). А здесь лишь отметим, что ϕ это элементарная конструкция из проточисел и в этом смысле константу ϕ нельзя считать независимой математической константой.

Уточним, что, считая аксиоматически заданный 0 константой наивысшего, условно *нулевого, ранга*, мы должны считать константами *первого ранга* связанные с нулем, функциями ψ и α и составляющие замкнутую числовую систему проточисла. Сюда можно добавить постоянную Эйлера, которая в противоположность ϕ элементарной комбинацией проточисел не является и в получении которой используется по сути логико-математический, выражаемый в аксиоматике через не только математические операции, но и логические кванторы, принцип бесконечного предельного перехода. А золотому числу ϕ и комбинациям вроде e^π , e^γ , 2π , $\pi/2$, $\pi^2/4$, $\ln 2$, $\sqrt{2}$ и даже более сложным комбинациям отводится в этой иерархии место констант *второго ранга*.

В свете сказанного неизбежно встает вопрос об общем количестве констант первого ранга, который мы поставим в ставшей уже традиционной форме: все ли начальные потенции системы **AGE** задействованы для получения фундаментальных математических констант и нет ли каких-то других, не использованных еще возможностей? Способ введения проточисел, а также знакомство со спецификой постоянной Эйлера имеют решающее значение для понимания этого вопроса и позволяют подойти к ответу на него с самых общих позиций. Анализ ситуации под таким углом зрения показывает, что в плане образования термов (см. [раздел 1.3](#)) неиспользованным пока остается конструктивный принцип, сформулированный в правиле 2 и относящийся к термам все образуемые суперпозицией сложные функции. Действительно, принцип суперпозиции функций, за исключением наиболее элементарных его проявлений вроде

$$\psi(\alpha), \alpha(\psi), \psi(\psi(0)), \alpha(\psi(0))$$

ни разу еще не применялся, и можно по крайней мере допустить, что неэлементарное, выражающееся через операцию $\lim$ действие этого принципа может привести к чему-то принципиально новому, необычному. Система функциональных уравнений E_1 – E_4 содержит все основные виды сохранения (инвариантность аналитической формы связи, инвариантность величины по отношению к преобразованию, наличие в преобразовании числовых констант) за исключением лишь одного – независимости числового решения от выбора переменных преобразования. Таковы обнаруживаемые при двустороннем анализе неустраиваемые еще возможности. Сводя воедино оба начала – бесконечную суперпозицию и не зависящую от переменных преобразования константу, приходим к следующему функциональному уравнению:

$$E_5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(S(\dots S(x)\dots)) = \text{const}$$

Символом S здесь обозначена неизвестная еще функция или, быть может, функции, бесконечная суперпозиция которой (которых) должна по идее привести к гипотетической и не равной другим константе (константам); x означает произвольно взятое число.

Предполагая существование обратной S функции $\text{arg } S$, рассматривая выражение во внешних скобках как функцию-переменную и опираясь на очевидное свойство операции предельного перехода $\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n-1 \rightarrow \infty}$ можно свести всё к системе двух уравнений для прямой и обратной функций, которую представим в виде двойного равенства

$$E_{51} \quad S(x) = \text{arg } S(x) = x$$

содержащего константу(ы) суперпозиции уже неявно, в качестве числового решения системы уравнений. Решение ищем в *простейших элементарных функциях*, понимая под этим все известные элементарные функции математики исключая, однако, их комбинации, получаемые применением арифметических действий и суперпозиции. Располагая списком из почти трех десятков функций, можно тестировать их методом последовательного исключения функций, не удовлетворяющих фундаментальному уравнению E_5 . С этой целью сформулируем по убывающей степени общности естественные требования, предъявляемые к искомой функции (или функциям).

- а) Уравнение E_5 имеет место для всех действительных чисел
- б) Графики функций $f(x)$, $f^{-1}(x)$ и $y = x$ имеют общую точку пересечения, в которой выполняется соотношение E_{51} , то есть равенство значений функции, обратной функции и аргумента
- в) Функции $f(x)$, $f^{-1}(x)$ и $y = x$ пересекаются лишь в одной точке
- г) Эта точка отлична от 0 и 1

Всем этим требованиям удовлетворяют лишь три функции a^x , $\cos x$, $\text{sech } x$. Учтем теперь, что уравнение суперпозиции E_5 , рассматриваемое отдельно от остальных лишь по практическим

соображениям, является неотъемлемой частью системы уравнений E_1-E_5 . А последняя представляет собой единую систему функциональных уравнений с единственным решением в найденных уже функциях $\psi(x)$, $\alpha(x)$ и в константах, из которых неизвестны пока лишь константы суперпозиции. Отсюда следует, что показательная функция может быть только экспонентой: $a^x = e^{-x}$.

Таким образом, решение уравнения E_5 в элементарных функциях действительной переменной приводит к следующим функциям и константам:

$$\psi(-x) \equiv e^{-x} \quad x_e = 0,56714\ 32904 \dots$$

$$\cos x \equiv \frac{\psi(ix) + \psi(-ix)}{2} \equiv \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad x_c = 0,73908\ 51332 \dots$$

$$\operatorname{sech} x \equiv \frac{2}{\psi(x) + \psi(-x)} \equiv \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad x_h = 0,76500\ 99545 \dots$$

Из трех довольно близких по значению констант последняя, как скоро выяснится, менее значительна чем две другие, а тройные точки пересечения x_c и x_e показаны на рисунках; для большей наглядности отдельно приводятся также взятые в более широком интервале графики функций $\cos x = x$ и $y = x$, пересекающиеся в точке x_c .

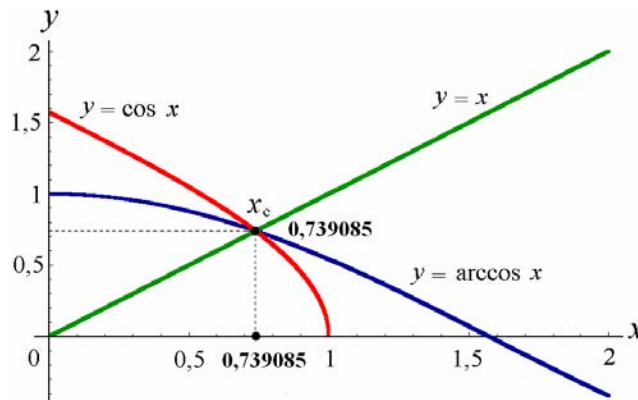


Рис. 1.20.1

Константа x_c как тройная точка пересечения кривых $y = \cos x$, $y = \arccos x$ и $y = x$

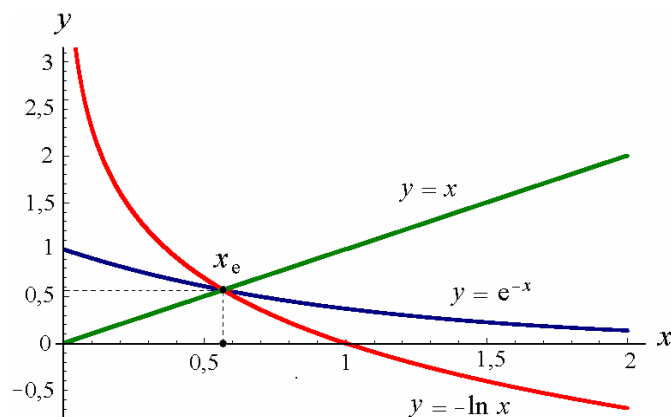


Рис. 1.20.2

Константа x_e как тройная точка пересечения кривых $y = e^{-x}$, $y = -\ln x$ и $y = x$

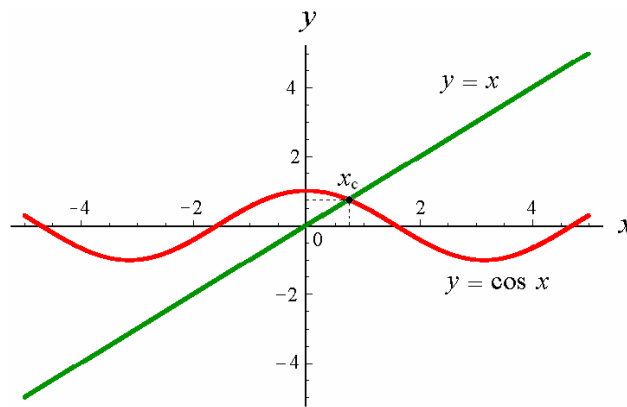


Рис. 1.20.3

Пересечения кривых $y = \cos x$ и $y = x$ в точке x_c

1.21. Суперпозиция для действительной и мнимой переменных

Все три прошедшие отбор функции непосредственно связаны с экспонентой и потому дальнейшее исследование фактически касается свойств материнской функции ψ . Переход от частного случая функции действительной переменной к более общему случаю функций действительной и мнимой переменных означает добавление нового условия, дополняющего условие (а).

д) Уравнение E_5 имеет место для всех мнимых чисел

Перед тестированием трех функций на соответствие последнему условию посмотрим, какова зависимость между действительными и мнимыми значениями независимой переменной, с одной стороны, и значениями экспоненциальной функции и ее простейших комбинаций, с другой. Известно, что экспонента преобразует действительное число в действительное, а мнимое число в комплексное. Понятно также, что при умножении и делении, то есть в выражениях типа

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}, \quad e^x : e^y = e^{x-y}, \quad e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}, \quad e^{ix} : e^{iy} = e^{i(x-y)}$$

в этом плане ничего не меняется. Посмотрим, как обстоит дело со сложением и вычитанием для мнимых переменных, поскольку с действительными переменными и так все ясно: действительное преобразуется в действительное. Имеем

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \right) \equiv 2 \sin x$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \right) \equiv 2 \cos x$$

Теперь уже все ясно: не сама экспонента с мнимой переменной, не произведение или частное экспонент такого типа и не разность $e^{ix} - e^{-ix}$, а лишь сумма $e^{ix} + e^{-ix}$ обладает примечательным свойством переводить мнимое число в действительное.

В этом и состоит, кстати, принципиальная разница между косинусом и синусом. С геометрической точки зрения график косинуса – та же синусоида, смещенная на $\pi/2$ вдоль числовой оси, и это способно породить преувеличенное представление о близости, чуть ли не тождества двух функций. Ведь параллельный перенос вдоль оси абсцисс, допустим, линейной функции $y = ax + b$ не отражается на ее основных свойствах: это всё та же функция, лишь иначе расположенная относительно координатных осей. В случае тригонометрических e - i - 2 - x -функций всё намного сложнее. График функции, аналитическая кривая является, вообще говоря, лишь наглядным геометрическим образом аналитического закона, устанавливающего

соответствие между числовыми величинами, и потому с общей точки зрения сходство двух функций есть сходство двух законов. Но так ли сходны означенные законы, называемые косинусом и синусом, и нет ли между ними принципиальных различий? Возьмем, например, в функциях $\cos x$ и $\sin x$ аргумент x равным мнимой единице i умноженной на 2. Бесконечная суперпозиция косинуса переводит $2i$, как и любое другое действительное или мнимое число, в константу x_c , а вот суперпозиция синуса приводит к последовательности

$$3,6i; 18,8i; 7,2 \cdot 10^9 i; 4,7 \cdot 10^{31227831} i; \dots$$

мнимых чисел типа $y_n i$, в которой действительная переменная y_n стремительно сходится к бесконечности.

Известное соотношение

$$\operatorname{sech}(ix) = \sec(x) = 1/\cos x$$

показывает, что гиперболический секанс мнимого числа есть число действительное, следовательно формула E_5 имеет место не только для всех действительных, но и для различных мнимых чисел, однако не всех. Функция $\operatorname{sech} z$ не определена в точках

$$z_n = n \cdot \pi i / 2 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

в которых она обращается в бесконечность, следовательно условию (д) функция $\operatorname{sech} z$ не удовлетворяет, а константа суперпозиции всех действительных чисел x_h на роль ФМК претендовать не может. Понятно также, что преимущество функции $\cos x$ (как универсального генератора одной из ФМК) перед $\operatorname{sech}(ix)$ состоит в том, что выражение $\psi(ix) + \psi(-ix)$ стоит здесь в числителе, а не в знаменателе дроби, оттого и нет у косинуса особых точек указанного типа.

В итоге, условиям (а)–(д) удовлетворяют лишь функции $(e^{-x} + e^x)/2$ и e^{-x} со своими константами суперпозиции ω (первая буква армянского алфавита, читается “а”) и $W(1)$:

$$x_c \equiv \omega, \quad x_h \equiv W(1)$$

По поводу последнего обозначения скоро будут даны необходимые разъяснения. Для данной пары функций и констант справедливость предельного отношения E_5 не зависит от выбора начальной, действительной или мнимой, переменной x . На языке логического исчисления вхождение переменной x в формулу E_5 называется связанным. А выражаясь языком геометрии, можно сказать, что применением принципа бесконечной суперпозиции ко всем точкам, лежащим на действительной и мнимой осях, обе оси отображаются в точки ω или $W(1)$.

Для функции косинуса из уравнения

$$E_{52} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\cos \dots \cos(z) \dots) = \omega$$

имеем

$$E_{53} \quad \cos z = \arccos z = z$$

Аналогично для экспоненты e^{-x} из исходного уравнения

$$E_{54} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}(\psi^{-1} \dots \psi^{-1}(z) \dots) = W(1)$$

получаем

$$E_{55} \quad e^{-z} = \operatorname{Ln}(-z) = z$$

Трансцендентные уравнения E_{53} и E_{55} , удобные для вычисления констант ω и $W(1)$, неразрешимы в конечном виде относительно неизвестной x . Стало быть, эти константы, связанные как и должно с функциями ψ , α и проточислами, не являются однако комбинациями последних наподобие e^π или, допустим, $\pi^2/4$. Следовательно, ω и $W(1)$ имеют равный с π , e , i , 2 , γ статус констант первого ранга.

Займемся вначале константой ω . Предшествующее изложение подводит к мысли, что в области действительных и мнимых чисел любая математическая константа через те или иные операции обусловлена материнскими операциями ψ и α и что все константы глубоко связаны друг с другом, составляя единую взаимодополняющую систему выделенных математических величин. В этом мы убедились на примере постоянной Эйлера, и вполне закономерно, что константа ω , определяемая уравнением E_5 через исходную в системе AGE операцию суперпозиции, то есть будто совершенно независимо от принципов, которые положены в основу определения функций ψ , α и проточисел, тем не менее имеет решение непосредственно соотносящееся с теми и другими. Более того, близость по природе, удивительное сходство вторичных аналитических форм, включенность константы ω в систему фундаментальных констант бросается в глаза, если простейшую комбинацию соотношений для проточисел сравнить с соотношением E_{53} , получаемым из исходного E_5 :

$$\frac{\psi(i\pi) + \psi(-i\pi)}{2} = i \cdot i$$

$$\frac{\psi(i\omega) + \psi(-i\omega)}{2} = \omega$$

В обоих соотношениях полусумма функциональных слагаемых типа $\psi(x)$, $\psi(-x)$ дает одну из содержащихся под знаком функции констант, другими словами $e^{-2-i-\pi}$ -преобразование приводит к $i \cdot i$, а $e^{-2-i-\omega}$ -преобразование, с заменой π на ω , приводит к ω . В обоих соотношениях содержатся только константы, составляющие таким образом семейство взаимосогласованных фундаментальных математических величин. Уравнение E_5 , определяющее фактически константы ω и $W(1)$, наряду с функцией косинуса

$$S(x) = \frac{\psi(ix) + \psi(-ix)}{2} \quad (x \text{ действительно или мнимо})$$

и материнской функцией $\psi^{-1}(x)$ с самого начала могло быть включено в систему функциональных уравнений E в качестве одного из ее уравнений. Но стоявшие тогда задачи, в частности введение новых операций и построение континуума, не требовали констант γ , ω и $W(1)$, добавление же уравнения E_5 несколько осложнило бы решение системы из пяти уравнений, и в основном по техническим соображениям мы предпочли заняться суперпозицией позже.

Решая любое из трех уравнений E_{53} (удобнее, конечно, иметь дело с уравнением $\cos x = x$ для действительной переменной x) одним из существующих методов приближенного решения трансцендентных уравнений, например стандартным методом касательных Ньютона, получим число

$$\begin{aligned} \omega = & 0,73908 \ 51332 \ 15160 \ 64165 \ 53120 \ 87673 \ 87340 \ 40134 \ 11758 \ 90075 \ 74649 \ 65680 \\ & 63577 \ 32846 \ 54883 \ 54759 \ 45993 \ 76106 \ 93176 \ 65318 \ 49801 \ 24664 \ 39871 \ 63027 \\ & 71490 \ 36913 \ 08420 \ 31578 \ 04405 \ 74620 \ 77868 \ 85249 \ 03891 \ 53928 \ 94388 \ 45095 \\ & 23480 \ 13356 \ 12767 \ 7223... \end{aligned}$$

которое по всей видимости трансцендентно, то есть выражается бесконечной непериодической десятичной (или любой другой n -ичной) дробью. Здесь приведены лишь двести знаков десятичного представления константы ω , а с точностью в 100 000 знаков она дана в [Новая ФМК](#). Заметим также, что есть и другой – общедоступный, “эмпирический” способ получить десятичное приближение числа ω . Дело в том, что с определенной точностью оно как бы содержится в любом калькуляторе, способном производить операцию $\cos$. Надо лишь наугад набрать число (в радианах) или, ничего даже не набирая, нажимать раз за разом или держать нажатой кнопку “cos”. Получаемый с доступной для данного калькулятора точностью результат скоро замелькает на экране.

О характере приближения к пределу получаемой из E_{52} последовательности чисел можно судить по приведенным в следующем разделе рисункам. Для мнимой переменной ix это последовательность действительных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$$

которая с каждым шагом приближается к своему пределу, попеременно принимая большие и меньшие чем ix значения. Что касается второго случая, он несколько своеобразен. Экспонента e^{-ix} переводит мнимое число в комплексное, поэтому для любого ix уравнение E_{52} приводит к бесконечному упорядоченному множеству типа

$$x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3, \dots, x_n + iy_n, \dots$$

Особенность этой последовательности комплексных чисел в том, что с увеличением n варианта y_n стремится к нулю, переменная же x_n , а вместе с ней и вся последовательность $x_n + iy_n$, сходится к пределу $W(1)$. При этом, как и в случае косинуса, переменная x_n приближается к своему пределу колеблясь возле точки сходимости $W(1)$ с постоянно уменьшающейся амплитудой колебаний. Первые двести знаков десятичного представления второй константы суперпозиции таковы:

$$\begin{aligned} W(1) = & 0,56714\ 32904\ 09783\ 87299\ 99686\ 62210\ 35554\ 97538\ 15787\ 18651\ 25081\ 35131 \\ & 07922\ 30457\ 93086\ 68456\ 66932\ 19446\ 96175\ 22945\ 57638\ 02497\ 28667\ 89785 \\ & 45235\ 84659\ 40072\ 99560\ 85164\ 39289\ 99461\ 43115\ 71492\ 95980\ 35943\ 76698 \\ & 47463\ 56061\ 34226\ 84613\dots \end{aligned}$$

Используемое здесь обозначение не случайно, поскольку речь фактически идет об определенном значении функции Ламберта $W(z)$, или омега-функции, см. [Michon], обычно задаваемой функциональным уравнением

$$z = W(z)e^{W(z)}, \text{ или } W = ze^{-W}$$

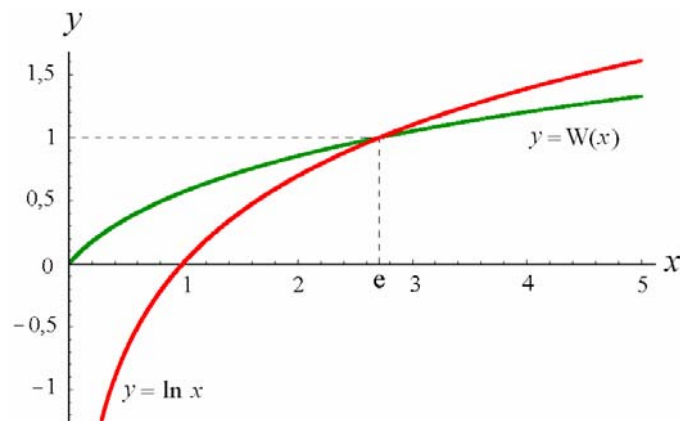


Рис. 1.21

Графики функций $W(x)$ и $\ln x$

Функция $W(z)$, определенная для множества всех чисел z включая 0 и используемая при решении различных трансцендентных уравнений, нашла достаточно широкое применение в чистой математике и за ее пределами – в физике и биологии, в механике жидких сред, при анализе динамических систем, в теории алгоритмов и т.д., см. [Corless et al.]. Кривая $W(x)$, ($x \geq 0$, $W(0) = 0$), напоминающая по виду график логарифма, показана на рисунке вместе с кривой $y = \ln x$.

Если $z = 1$, получаем уравнение

$$W(1) = e^{-W(1)}$$

тождественное E_{55} . Таким образом, одно из двух решений уравнения E_5 для действительной и мнимой переменных совпадает с выделенным значением функции $W(z)$, соответствующим простейшему случаю отсутствия множителя z в соответствующем уравнении. В этом смысле число $W(1)$ может считаться первенцем бесконечного семейства чисел $W(z)$. Следует также отметить, что пути, ведущие к константе $0,567143\dots$, весьма различны. В то время как в последнем уравнении экспонента задана с самого начала и задача сводится лишь к нахождению различных значений $W(z)$ в зависимости от значений переменной z , в функциональном уравнении E_5 неизвестными “величинами” наряду с ω и $W(1)$ являются функции $\cos(z)$ и e^{-z} , причем значения констант суперпозиции от конкретных значений z никак не зависят. Остается добавить, что получение приближенного десятичного значения константы $W(1)$ на калькуляторе ненамного сложнее чем в случае константы ω . Взяв произвольное число, надо производить над ним одну за другой операции e^x и $1/x$ до тех пор, пока число $0,56714\ 32904\dots$ не появится на дисплее с максимальной для данного калькулятора точностью.

1.22. Еще о косинусе и экспоненте

Исследование, предпринятое с целью учета всех допустимых вариантов, хотя и внесло некоторую ясность, но заодно породило, как это нередко бывает, ряд новых и довольно неожиданных вопросов. Насколько полон список простейших элементарных функций и всегда ли мы имели дело с *элементарностью* на уровне материнских функций? Или же сюда были привнесены и чуждые корневой структуре системы AGE моменты, обусловленные использованием традиционной классификации и терминологии? Сколько в общей сложности *истинно элементарных функций* и констант суперпозиции, удовлетворяющих всем требованиям? Обсуждение подобных вопросов оправдано прежде всего тем, что оно с неизбежностью приводит к рассмотрению одного достаточно нетривиального вопроса. У $\cos x$ как функции, обладающей необходимыми для получения новой фундаментальной математической константы свойствами, нет кроме самой экспоненты e^{-x} альтернативы среди других элементарных функций, но претендент, если вдуматься, появился в собственном доме. Косинус это, по сути, лишь название *полусуммы* экспонент указанного типа, а раз так, чем, спрашивается, хуже *сумма* $e^{ix} + e^{-ix}$, равная $2\cos x$? Напомним, что истинная природа косинуса впервые была установлена Эйлером на основе равенства именно этих выражений, так что исторический приоритет за суммой, а не полусуммой экспонент. Подобные утверждения могут показаться странными особенно после всего, что было сказано о функции косинуса, приведшей к фундаментальной константе ω . Но еще раз критически посмотрим на всё, что касается этой константы. Фундаментальное уравнение E_5 как необходимый компонент корневой системы формализма теории ЛМФ критике практически недоступен. Однако его решение мы искали лишь в области известных, можно сказать канонизированных, элементарных функций. Здесь функция косинуса и константа ω и впрямь, как было показано, являются одним из двух решений уравнения E_5 для действительных и мнимых чисел. Но лишь только мы добрались, перебирая все варианты, до истоков теории, лишь только обратились к понятию материнской функции и ее свойствам, как возникли новые, требующие своего решения вопросы.

Введем обозначение

$$e^{ix} + e^{-ix} \equiv 2\cos_2 x \equiv \cos_2 x$$

в котором индекс 2 указывает на соотношение между новой функцией и обычным косинусом. Как член семейства косинусов функция $\cos_2 x$ удовлетворяет уравнению E_{51} , являющемуся прямым следствием уравнения E_5 , хотя обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Решение уравнения $\cos_2 x = x$ приводит к числу

$$x_2 = 1,02986\ 65293\ 2225\dots$$

конкурирующему, может показаться, с ω . Из сравнения формул

$$\arccos x = -i \ln(x + i\sqrt{1-x^2})$$

$$\operatorname{arccos}_2 x = -i \ln \left(\frac{x}{2} + i \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2} \right)$$

видно, что хотя сумма двух экспонент и не содержит константы 2, однако последняя появляется в выражении для ее обратной функции; для полусуммы экспонент дело обстоит ровно наоборот. Определяя синус по общему правилу “замена суммы экспонент на разность, с добавлением i в знаменателе”, получим

$$\sin_2 x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i} = 2 \sin x$$

откуда, между прочим, следуют равенства

$$\tan_2 x = \tan x, \quad \cot_2 x = \cot x$$

свидетельствующие об инвариантности функций тангенса и котангенса при переходе от одного члена семейства синусов и косинусов к другому. Словом, на данной стадии исследования видимых причин для предпочтения константы i числу x_2 пока нет.

Если идти и дальше по пути обобщений, мы придем к тому, что можно назвать, допустим, обобщенной теорией косинуса, а лучше обобщенной теорией тригонометрических и гиперболических функций. В основу ее следует положить формулу

$$\cos_{apq} x = \frac{a^{qix} + a^{-qix}}{p}$$

определяющую обобщенный косинус тремя положительными вещественными параметрами $a \neq 1$, p , q ; если, например, $a = \phi$, $p = \pi/\sqrt{2}$, $q = \gamma$, то точка $x_{apq} = 0,87392\,11247\dots$ Причем непрерывная функция $\cos_{apq} x$ при $p = 1$ и любых $a > 0$ и $q > 0$ принимает все значения в замкнутом интервале $-2 \leq y \leq 2$, а при любом другом $p > 0$ – все значения в замкнутом интервале $-2/p \leq y \leq 2/p$. Отсюда, как частный случай соответствующий $p = 2$, получается интервал допустимых значений $-1 \leq y \leq 1$ для обычного косинуса. Всю остальную теорию обобщенных тригонометрических и гиперболических функций включая их интегральные представления нетрудно построить по уже известной схеме. Но это больше, конечно, походит на игру, в которую нет надобности играть, поскольку с интересующей нас точки зрения значим не обобщенный косинус, а косинус, строящийся с помощью материнской экспоненциальной функции. Ограничившись поэтому сказанным, вернемся к функции $e^{ix} + e^{-ix}$, кажущейся реальной альтернативой функции $(e^{ix} + e^{-ix})/2$.

Здесь нас поджидает сюрприз, который, пожалуй, можно отнести к разряду трудно предсказуемых. Отметим, что отображение мнимых чисел в действительные и наличие тройной точки пересечения – необходимые, но не достаточные условия существования константы суперпозиции. Это лишь прямые следствия фундаментального уравнения E_5 , суть которого в том, что *любая действительная или мнимая переменная путем последовательного применения оператора суперпозиции к некой функции переводится в пределе в постоянное число*. Всё очень просто. Функция $\cos_2 x$ прошла все стадии предварительного отбора, проведенного, напомним, больше для наглядности, чем в силу железной необходимости, и теперь весь вопрос в том, удовлетворяет ли эта функция уравнению E_5 . При положительном ответе список ФМК, очевидно, должен быть увеличен еще на одну константу со всеми вытекающими отсюда последствиями, которые, как учит нас история математики, могут быть серьезными и непредсказуемыми. Выясняется однако, что функция $e^{ix} + e^{-ix}$ в отличие от $(e^{ix} + e^{-ix})/2$ уравнению E_5 не удовлетворяет. Не вдаваясь в детали, покажем этот нетривиальный факт наглядным графическим методом. Существование предела обычно означает последовательное приближение к нему. Конкретно в нашем случае нетрудно понять, что существование предела равносильно стягиванию бесконечной последовательности функций

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x)))) , \dots$$

к постоянной точке, неограниченному уменьшению амплитуды колебаний последовательности относительно своего предела. Посмотрим вначале, как это выглядит на примере функции $\cos x$, указывая число последовательных применений оператора f .

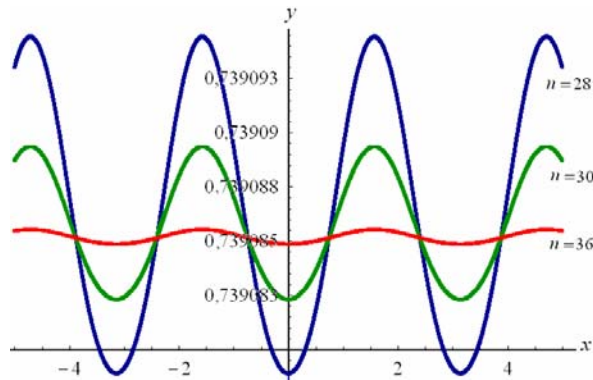


Рис. 1.22.1

Графики функции $\cos(\cos(\dots\cos(x)\dots))$ для $n = 28, 30, 36$

Здесь всё достаточно ясно: последовательность функций неуклонно стягивается к определенной точке и уже для $n \sim 30$ константа $\omega = 0,739085\dots$ четко обозначается на графике с точностью до шести верных знаков.

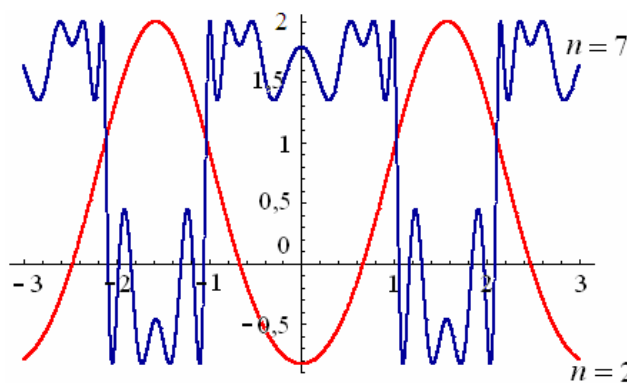


Рис. 1.22.2

Графики функции $\cos_2(\cos_2(\dots\cos_2(x)\dots))$ для $n = 2, 7$

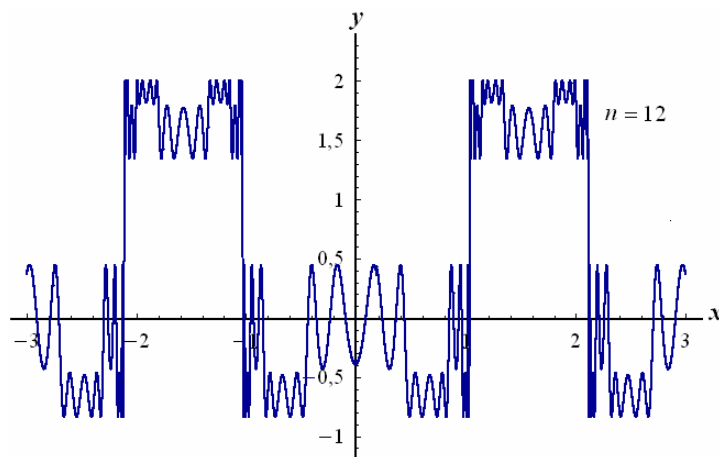


Рис. 1.22.3

График функции $\cos_2(\cos_2(\dots\cos_2(x)\dots))$ для $n = 12$

Картина совсем другая. Из-за большого числа пиков нет возможности показать кривые для больших номеров, и уже для $n = 10$ приходится брать очень малый отрезок оси абсцисс. Но и по этим графикам видно, что для всех $n > 1$ функция принимает все значения приблизительно в интервале $0,8 \div 1,8$. Интересная, надо сказать, функция, имеющая для достаточно больших n несколько периодически повторяющихся экстремумов, однако ни о каком стягивании к определенной точке здесь говорить не приходится. Тем самым вопрос, пусть не в строгой аналитической, но визуально убедительной графической форме окончательно решен. Функция $\cos_2 x$ фундаментальному уравнению E_5 не удовлетворяет и в этом смысле альтернативой обычному косинусу или его дополнением не является.

Остается рассмотреть общий случай комплексной переменной z . Записывая, как обычно, z посредством константы i , имеем следующие представления функции $\cos z$:

$$\cos(x + iy) = e^x \cdot \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy = \cos x \cdot \cosh y - \sin x \cdot \sinh y$$

Отсюда видно, что $\cos(x + iy)$ является сложной, составленной из элементарных блоков функцией. А поскольку решение уравнения E_5 искалось лишь в простейших элементарных функциях, вопрос о том, удовлетворяет ли $\cos(x + iy)$ данному уравнению, очевидно, не должен ставиться. Аналогично экспонента

$$e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x} \cdot e^{-iy}$$

составленная из элементарных e^{-x} и e^{-iy} , проверке на соответствие фундаментальному уравнению E_5 не подлежит. Надо полагать, что условия (а)–(д), сформулированные для простейших элементарных функций действительной и мнимой переменных, необходимы и достаточны для выявления искомых функций и фундаментальных констант. Все же заметим в скобках, что суперпозиция функции $\cos(x + iy)$ приводит к бесконечности, а суперпозиция экспоненты $e^{-(x+iy)}$ сходится к константе $W(1)$ по тому же закону, что и для мнимой переменной, то есть в последовательности $z_n = x_n + iy_n$ при $n \rightarrow \infty$ варианта y_n стремится к нулю, а x_n – к числу $W(1)$.

1.23. Замечания, итоги и перспективы

Характерной особенностью фундаментальных математических констант является неожиданное появление в самых разных разделах чистой и прикладной математики, в самых разных ролях и в самых непредвиденных обстоятельствах. История математики полна таких неожиданностей, притом в отношении всех фундаментальных констант. В связи с этим любопытно отметить, что уравнение $\cos x = x$ в последнее время встречается довольно часто. В этом можно убедиться с помощью Интернета, последовательно задавая например поиск десятичных приближений

$$0,73908; 0,739085; 0,7390851; 0,73908513; 0,739085133, \dots$$

Для пяти-шести верных знаков после запятой количество web-страниц исчисляется сотнями, далее десятками, затем – с пятнадцати до почти шестидесяти (!) знаков – считанными единицами или полным отсутствием ссылок, после чего уже вроде ничего нет. Конечно, очень часто, особенно для четырех-пяти знаков, имеет место простое совпадение каких-то сочетаний цифр с тем или иным десятичным приближением константы. После того как всё случайное будет отброшено, останутся сотни страниц, где речь уже идет о математическом числе, являющемся решением уравнения для косинуса. Правда, и здесь рассмотрение часто носит формальный характер и преследует весьма ограниченные, преимущественно иллюстративные цели – при изложении приемов математического исследования, таких как анализ итерационных процессов и методы численного решения (например, метод касательных Ньютона) трансцендентных уравнений, простейшим и характерным примером которых и является

данное уравнение. Исследование формальных свойств косинуса, в частности его особых точек, также приводит к “магической” точке $0,739085\dots$. С основаниями математики, а тем более фундаментальной физикой эти случаи, безусловно, прямо не соотносятся, хотя и здесь можно найти подоплеку. Уравнение $\cos x = x$ относится к числу простейших трансцендентных уравнений, к тому же с единственным, графически легко представимым и не равным 0 или 1 решением. Всё вроде очень просто, доступно и лежит на поверхности, но лишь глубокий анализ позволяет постичь истинную природу указанного числа как фундаментальной математической константы одного ранга с π . Широкий выход новой константы за рамки чистой математики практически неотвратим, и вот уже число $0,739085\dots$ вместе с уравнением для косинуса появляется наряду с числами Фейгенбаума при анализе процессов перехода от хаоса к упорядоченности, при рассмотрении фракталов – см., например, [Bojar], при решении уравнения Кеплера для предельного случая, когда эксцентриситет эллиптической орбиты равен 1 [AKiTi]. В этом нет ничего удивительного или неожиданного, если принять во внимание исходное уравнение E_5 . Геометрически оно может интерпретироваться как отображение мнимой и действительной осей координат в одну точку, а содержательно истолковано как, допустим, переход от произвольной множественности к вполне определенной количественно иной особенности. Можно поэтому предположить, что новые появления константы ω в области физических явлений мыслимы при исследовании энтропийных процессов, процессов упорядочивания физических систем, фазовых переходов, фракталов, турбулентности, ...

Что касается числа $W(1)$, обнаружившего себя в качестве константы суперпозиции экспоненты в ходе очерченного выше исследования, то о его достаточно широком применении в области чистой математики и ее приложений уже говорилось. Однако константа $W(1)$ в отличие от ω в дальнейшем построении теории ЛМФ фактически не используется. Между тем ее теоретический статус не ниже чем у константы суперпозиции косинуса, и надо считаться с тем, что число, непосредственно связанное с материнской функцией ψ и являющееся наряду с шестью другими константами решением системы исходных функциональных уравнений E , имеет большую значимость. Математическая константа первого ранга, однажды и не важно даже при каких обстоятельствах обнаруженная, всегда находит себе множество применений в самых разных областях науки. Но требуется какое-то время для ее более полного и глубокого понимания, выявления связей с другими математическими реалиями, для последующей экспансии в область приложений математики. Поэтому остается только зачислить постоянную ω в “стратегический резерв” в надежде на скорое ее востребование.

Если вообще попытаться хотя бы в грубом приближении, без особых претензий на точность и тем более полноту, буквально в нескольких словах охарактеризовать наиболее характерную содержательную особенность, прикладную роль каждой из восьми фундаментальных математических констант, то картина может быть такой:

0	отсутствие данного количества или свойства
π	от прямолинейного к криволинейному
e	быстрое увеличение
i	периодические процессы
2	появление нелинейных связей
γ	переход к интегральным формам
ω , $W(1)$	переход от множественного к единичному

Таким образом, оставляя вопрос об общем количестве ФМК открытым для дальнейших исследований, мы все же имеем в своем распоряжении новую величину ω , которой вскоре предстоит сыграть особую роль в построениях и выводах теории ЛМФ, относящихся уже к последней, третьей ее составляющей – фундаментальной физике. Построения отчасти касаются числовых задач физической теории, связанных с вычислением физических постоянных

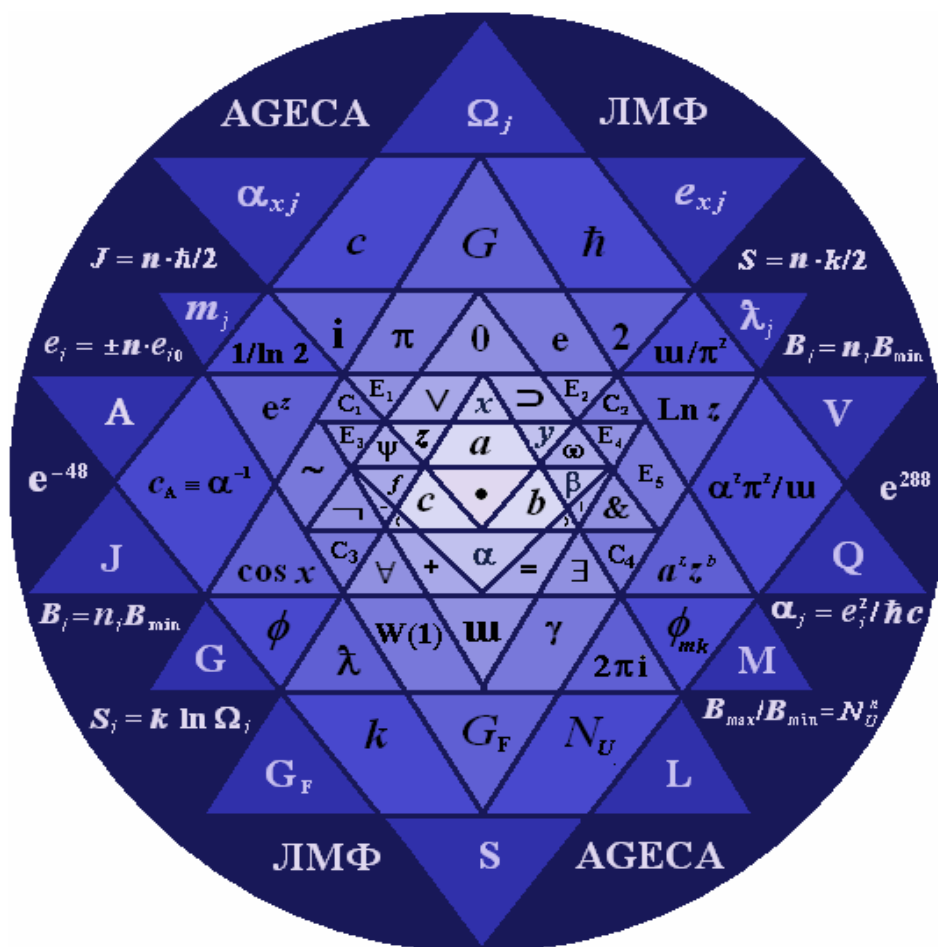
и считаемых сегодня практически “неразрешимыми”. В свете сказанного выше будем исходить из того, что набор требуемых здесь фундаментальных математических констант в отличие от существующих является достаточно полным. Такое заявление, конечно, ко многому обязывает и судить о его справедливости можно будет только по конечным результатам. В числах вообще заключена великая тайна и великая сила, которую человек стал осознавать с незапамятных времен. Не случайно числовая магия возникла задолго до появления математики как науки, оказав на последнюю немалое влияние, особенно в момент ее становления; не случайно и современная наука и “тайное знание” при всём их различии с одинаковым пиететом относятся к числам; пожалуй, только *наука о числах* (по-разному, конечно, понимаемая) является обязательной, неременной принадлежностью как фундаментальной науки, так и оккультизма. С высоты сегодняшнего знания кажется вполне очевидным, что в лоне математики и математического естествознания хорошо известные величины – фундаментальные математические константы – приобрели со временем высочайший статус, вселенскую значимость, о которой магия может только мечтать. Тем не менее с помощью имеющегося набора ФМК не то что решить, но хотя бы приблизиться к решению числовых задач физической теории, относящихся к физическим постоянным, не удалось. Из нашего рассмотрения следует, что *в этих пределах и с таким инструментарием* решить подобную задачу в полном объеме принципиально невозможно. Другими словами, только в том случае, если в арсенале исследования имеется достаточно полный набор исходных ФМК, включающий и константы суперпозиции ψ и $W(1)$, проблема теоретического, формально-математического определения ФП из разряда неразрешимых может быть переведена (в рамках теории ЛМФ) в категорию принципиально разрешимых. В данном контексте константа ψ это как бы последняя недостающая буква, необходимая для написания заветного слова, открывающего потайную дверь в удивительный мир загадочных числовых отношений космического происхождения, буква, без которой слово просто нельзя составить.

Литература

- Аракелян Г.Б.** *О доказательстве в математике (Методологический анализ)*. Ереван: Изд. АН, 1979
- *Фундаментальные безразмерные величины (Их роль и значение для методологии науки)*. Ереван: Изд. АН, 1981
 - *Числа и величины в современной физике*. Ереван: Изд. АН, 1989
 - *Фундаментальная теория ЛМФ*, Ереван, 2007
- Беркли Дж.** *Трактат о принципах человеческого знания*. В кн.: Дж. Беркли. Сочинения. М.: Мысль, 1976, с. 149–247
- Ван дер Варден Б.Л.** *Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции*. М.: Физматгиз, 1959
- Вейль Г.** *Континуум. Критические исследования по основаниям современного анализа*. В кн.: Г. Вейль. Математическое мышление. М.: Наука, 1989, с. 93–168
- Вилейтнер Г.** *История математики от Декарта до середины XIX столетия*. М.: Наука, 1966
- Гейтинг А.** *Интуиционизм*. М.: Мир, 1965
- Гильберт Д., Аккерман В.** *Основы теоретической логики*. М.: ИЛ, 1947
- Гильберт Д., Бернайс П.** *Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики*. М.: Наука, 1982
- *Основания математики. Теория доказательств*. М.: Наука, 1982a
- Гоббс Т.** *О теле*. В кн.: Т. Гоббс. Соч. в двух томах, т.1. М.: Мысль, 1989, с. 66–218
- Гурвиц А., Курант Р.** *Теория функций*. М.: Наука, 1968
- Давид Анахт.** *Определения философии*. В кн.: Давид Анахт. Сочинения. М.: Мысль, 1980, с. 29–100
- Диоген Лаэртский.** *О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов*. М.: Мысль, 1979

- Евклид.** *Начала*. Книги VII–X, пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949
- Зигмунд А.** *Тригонометрические ряды*, т. 1–2. М.: Мир, 1965
- Кантор Г.** *К учению о трансфинитном*. В кн.: Г. Кантор. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985, с. 268–325
- Кантор И.Л., Солодовников А.С.** *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973
- Карри Х.Б.** *Основания математической логики*. М.: Мир, 1973
- Клини С.** *Введение в метаматематику*. М.: ИЛ, 1957
– *Математическая логика*. М.: Мир, 1973
- Колмогоров А.Н.** *Величина*. В кн.: Математическая энциклопедия, т. 1. М.: Сов. энцикл., 1977, с. 651–653
- Курант Р.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I. М.: Наука, 1967
- Лейбниц Г.В.** *Письмо к Якобу Томазио о возможности примирить Аристотеля с новой философией*. В кн.: Г.В. Лейбниц. Соч. в четырех томах, т. I. М.: Мысль, 1982, с. 85–102
- Локк Дж.** *Опыт о человеческом разумении*. В кн.: Дж. Локк. Соч. в трех томах, т. I. М.: Мысль, 1985
- Лукаевич Я.** *Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики*. М.: ИЛ, 1959
- Нечаев В.И.** *Число*. В кн.: Математическая энциклопедия, т. 5. М.: Сов. энцикл., 1985, с. 873–878
- Новиков П.С.** *Элементы математической логики*. М.: Наука, 1973
- Пуанкаре А.** *Ценность науки*. В кн.: А. Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1983, с. 5–152
- Райдер Л.** *Элементарные частицы и симметрии*. М.: Наука, 1983
- Рассел Б.** *История западной философии*. Ростов-на-Дону: Феникс, 1998
- Секст Эмпирик.** *Против ученых*. Книга IV. *Против арифметиков*. В кн.: Секст Эмпирик. Соч. в двух томах, т. 2. М.: Мысль, 1976, с. 167–173
- Сена Л.А.** *Единицы физических величин и их размерности*. М.: Наука, 1977
- Стройк Д.Я.** *Краткий очерк истории математики*. М.: Наука, 1984
- Фаддеев Д.К.** *Число*. В кн.: БСЭ, т. 47. М.: Большая сов. энцикл., 1957, с. 394–397
- Фейс Р.** *Модальная логика*. М.: Наука, 1974
- Фихтенгольц Г.М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I. М.: Наука, 1966
- Френкель А., Бар-Хиллел И.** *Основания теории множеств*. М.: Мир, 1966
- Чёрч А.** *Введение в математическую логику*, т. I. М.: ИЛ, 1961
- AKiTi Kepler's Equation of Elliptical Motion*, 2004 <http://www.akitica/KeplerEquation.html>
- Beckmann P.** *A History of π* . New York: St. Martin Press, 1971
- Bekenstein J.D.** *Phys. Rev.* **D7**, 2333 (1973)
- Bennett G.W. et al.** *Muon g-2 Collaboration. Phys. Rev. Lett.* **89**, 101804 (2002)
- Berman S.M.** *Phys. Rev.* **112**, 267 (1958)
- Bojar Ondřej.** *Chaos přehledně*, 1999 <http://chaospace.hyperlinx.cz/index.php?pgid=230>
- Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., and Knuth D.E.** *On the Lambert W Function*. *Advances in Computational Mathematics* **5**, 329–359 (1996)
- Finch Steven.** *Mathematical Constants*. Cambridge Univ. Press, 2003
- Goddard L. and Routley R.** *The Logic of Significance and Context*, v.1. Edinburgh: Scottish Academic Press, 1973
- History of Pi*. Wikipedia, 2006 http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Pi
- Lewis C.I.** *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press, 1918
- Lewis C.I. and Langford C.H.** *Symbolic Logic*. New York: Dover, 1959
- Michon G.P.** *Final Answers: Numerical Constants* <http://home.att.net/~numericana/answer/constants.htm#mertens>
- O'Connor J.J. and Robertson E.F.** *A History of Pi*. Mac Tutor Project, 1996
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Hist_Topics/Pi_through_the_ages.html
- Plouffe S.** *Table of Computation of Pi from 2000 BC to Now*. Talking About Pi?
<http://oldweb.cecm.sfu.ca/projects/ISC/Pihistory.html>

Whitehead A.N., Russell B. *Principia Mathematica*, v.2. Cambridge (Eng.): Cambridge Univ. Press, 1912



Гостевая



Автор с признательностью ознакомится с любыми замечаниями по содержанию сайта или отдельных его частей, высказанными на [форуме](#) или полученными по адресу: hrantara@gmail.com